スピン幾何学入門

今田 夏暉

2024 年 6 月　7 日 (v1)
2025 年 8 月 22 日 (v2)

はじめに

以下，特に断りがない限り多様体と言えば滑らかな多様体のこととする．多様体上にはその構造に対応した群 G があり，G を構造群にもつ主 G 束が作れる．何も構造が入っていない場合は主 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 束 $P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M$ が対応する．多様体上に構造があるとこの主束は小さくすることができる．例えば計量が入れば，主 $\mathrm{O}(n)$ 束 $P_{\mathrm{O}(n)}M$ まで縮められる．本稿で扱うのは向き付けられたリーマン多様体であり，したがって主 $\mathrm{SO}(n)$ 束 $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ が考えられる．

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ は $\mathrm{SO}(n)$ の二重被覆群である．そこで主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ であって二重被覆の構造と両立するようなものが存在するか考えたい．この $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ を M 上のスピン構造と呼ぶ．スピン構造は全ての向き付けられたリーマン多様体上に存在するわけではなく，スピン構造が存在するか否かは M の位相的な条件である．

$\mathrm{Spin}(n)$ が $\mathrm{SO}(n)$ の二重被覆群であるということから，$\mathrm{SO}(n)$ の表現は $\mathrm{Spin}(n)$ の表現と見做せる．しかしながら $\mathrm{Spin}(n)$ の表現は必ずしも $\mathrm{SO}(n)$ の表現と見做せるとは限らない．すなわち $\mathrm{SO}(n)$ からは得られない $\mathrm{Spin}(n)$ 独自の表現が存在する．そのような表現をスピノール表現といい，その表現空間の元をスピノールと呼ぶ．

スピン構造を用いることで多様体上にスピノール束を作ることができる．これは各ファイバーがスピノール空間になっているようなベクトル束である．スピノール束の切断をスピノール場という．すなわち，多様体上の各点にスピノールを対応させたものがスピノール場である．また，スピノール場に作用する微分演算子としてディラック作用素があり，これはラプラシアンの平方根に相当するものである．

本稿では，以上の内容についてできるだけ最短でたどり着き，スピン幾何学を勉強するモチベーションを上げることを目指す．逆に言えば，関連する興味深い話題などにはあまり立ち入らないので，適宜リーマン幾何学やスピン幾何学の教科書を参考にしてほしい．特に様々な特殊スピノール (平行スピノール, 調和スピノール, キリングスピノール, ツイスタースピノール, etc...) については一切触れない．

本稿は主に [Hom16, BHM+15] を参考にしている．前提知識としては多様体，Lie 群，Lie 代数に関する基本的な知識を想定している．これらに関しては例えば [Tu19] などを参照してほしい．本稿内で定義していない多様体に関する記法は [Tu19] に準ずる．

目次

第 1 章　準備 (代数) 1
1.1　クリフォード代数 1
1.2　スピン群 3
1.3　スピノール表現 5

第 2 章　準備 (幾何) 9
2.1　リーマン多様体 9
2.2　ベクトル束 10
2.2.1　ベクトル束の定義 10
2.2.2　ベクトル束の接続 12
2.3　主束 14
2.3.1　主束の定義 14
2.3.2　主束の接続形式 16
2.4　同伴ベクトル束 18

第 3 章　スピン多様体 21
3.1　スピン構造 21
3.2　スピノール場 22
3.2.1　スピノール場の定義 22
3.2.2　スピノール束へのクリフォード束の作用 22
3.3　スピン接続 23
3.4　ディラック作用素 24

参考文献 27

1 準備 (代数)

スピン群は特殊直交群の二重被覆群である．$\mathrm{SO}(n)$ の基本群は

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n \geq 3) \\ \mathbb{Z} & (n = 2) \\ 1 & (n = 1) \end{cases}$$

となっているので，被覆空間の理論から $\mathrm{SO}(n)$ には二重被覆が存在することがわかる．クリフォード代数を用いればスピン群を具体的に構成することができ，さらにスピノール表現も構成できる．クリフォード代数やスピン群については以前 mathlog に記事[*1]を書いてるのでそちらも参考にしてほしい．ここでは概要を説明するにとどめる．

1.1 クリフォード代数

$e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$ を標準基底とする．

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

という関係式から生成される $\mathbb{R}$-代数を (実) クリフォード代数という．この関係式は

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j)$$
$$e_i^2 = -1$$

[*1] https://mathlog.info/articles/CiZUQNN3mhCXenUwsrTH

ということである．厳密に定義すると次のようになる．

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ から得られるテンソル代数を

$$T = \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$$

とする．$I \subset T$ を $\{v \otimes v + \langle v, v \rangle \mid v \in R^n\}$ から生成される両側イデアル

$$I = \langle v \otimes v + \langle v, v \rangle \mid v \in R^n \rangle$$

とする．このとき商代数

$$\mathrm{C}l_n = T/I$$

をクリフォード代数という．

例 1.2. $\mathrm{C}l_1$ はベクトル空間としては $1, e_1$ を基底に持つ．$e_1^2 = -1$ であるから

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}l_1 & \to & \mathbb{C} \\ 1 & \mapsto & 1 \\ e_1 & \mapsto & i \end{array}$$

という対応によって $\mathbb{R}$-代数として $\mathrm{C}l_1 \cong \mathbb{C}$ である．

例 1.3. $\mathrm{C}l_2$ はベクトル空間としては $1, e_1, e_2, e_1e_2$ を基底に持つ．$e_1^2 = -1, e_2^2 = -1, (e_1e_2)^2 = -1$ であるから

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}l_2 & \to & \mathbb{H} \\ 1 & \mapsto & 1 \\ e_1 & \mapsto & i \\ e_2 & \mapsto & j \\ e_1e_2 & \mapsto & k \end{array}$$

という対応によって $\mathbb{R}$-代数として $\mathrm{C}l_2 \cong \mathbb{H}$ である．

命題 1.4. $\mathrm{C}l_1$ から $\mathrm{C}l_8$ までは表 1.1 に示す同型が成立する．実クリフォード代数は $\mathrm{C}l_{n+8} = \mathrm{C}l_n \otimes M_{16}(\mathbb{R})$ という周期性をもつ．ただし $M_n(K)$ は K を成分とする $n \times n$ 行列全体の集合を表す．

表 1.1

$\mathrm{C}l_1$	$\mathrm{C}l_2$	$\mathrm{C}l_3$	$\mathrm{C}l_4$	$\mathrm{C}l_5$	$\mathrm{C}l_6$	$\mathrm{C}l_7$	$\mathrm{C}l_8$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$

また複素クリフォード代数も重要である．

定義 1.5. 実クリフォード代数の複素化を複素クリフォード代数という.

$$\mathbb{C}l_n = \mathrm{C}l_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

命題 1.6. 複素クリフォード代数に対しては次の同型が成り立つ.

$$\mathbb{C}l_{2n} \cong M_{2^n}(\mathbb{C})$$
$$\mathbb{C}l_{2n+1} \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$$

1.2 スピン群

スピン群を定義するために，クリフォード代数に関する性質を一つ見ておく．$a, v \in \mathbb{R}^n\,(a \neq 0)$，$a$ に直交する超平面 ($(n-1)$ 次元部分空間) に関する v の鏡映を $\mathrm{Ref}_a(v)$ と表す．すなわち

$$\mathrm{Ref}_a(v) = v - 2\frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}a$$

である.

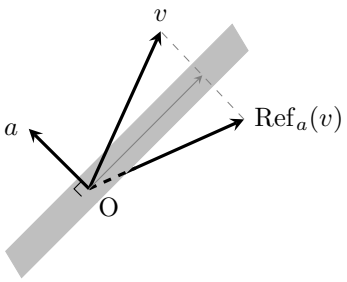


図 1.1 鏡映

命題 1.7. クリフォード代数を用いると鏡映は次のように表せる.

$$\mathrm{Ref}_a(v) = -ava^{-1}$$

証明.

$$a^{-1} = -\frac{a}{\|a\|^2}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}\mathrm{Ref}_a(v) &= v - 2\frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}a \\ &= v + 2\langle v, a\rangle a^{-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v - (va + av)a^{-1} \\
&= v - v - ava^{-1} \\
&= -ava^{-1}
\end{aligned}
$$

となる．□

鏡映変換は内積を保つので $\mathrm{O}(n)$ に入るが $\mathrm{SO}(n)$ には入らない．すなわち $\det(\mathrm{Ref}_a) = -1$ である．したがって

$$\det(\mathrm{Ref}_{a_1} \circ \mathrm{Ref}_{a_2}) = 1$$

であり，$\mathrm{Ref}_{a_1} \circ \mathrm{Ref}_{a_2} \in \mathrm{SO}(n)$ である．そこでスピン群を次のように定義する．

定義 1.8. $\mathrm{C}l_n$ の元のうち，偶数個の単位ベクトルの積からなるもの全体を n 次スピン群といい $\mathrm{Spin}(n)$ と表す．

$$\mathrm{Spin}(n) = \{a_1 a_2 \cdots a_{2m} \in \mathrm{C}l_n \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i \in \mathbb{R}^n, \|a_i\| = 1\}$$

$\mathrm{Spin}(n)$ は $\mathrm{C}l_n$ の乗法に関する部分群である．

$\mathrm{Spin}(n)$ の元は偶数個のベクトルの積であるから，先の議論から

$$\xi_n \colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n), \quad \xi_n(a_1 \cdots a_{2m}) = \mathrm{Ref}_{a_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Ref}_{a_{2m}}$$

が定義できる[*2]．これはリー群としての準同型になっている．また $\ker \xi_n = \{\pm 1\}$ である[*3]ことから 2:1 の写像になっていることがわかる．すなわち $\mathrm{Spin}(n)$ は ξ_n によって $\mathrm{SO}(n)$ の二重被覆になっている．

実は低次のスピン群は古典群と同型になる．

定理 1.9. 次の同型が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Spin}(1) \cong \{\pm 1\} \\
&\mathrm{Spin}(2) \cong S^1 \cong \mathrm{U}(1) \\
&\mathrm{Spin}(3) \cong S^3 \cong \mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Sp}(1) \\
&\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \\
&\mathrm{Spin}(5) \cong \mathrm{Sp}(2) \\
&\mathrm{Spin}(6) \cong \mathrm{SU}(4)
\end{aligned}
$$

[*2] ここでの「定義できる」は，ξ の像が $\mathrm{SO}(n)$ に入ることを意味している．本当は ξ の定義が代表元の取り方に寄らないか議論すべきだがここでは省略する．

[*3] $\{\pm 1\} \subset \ker \xi_n$ であることは

$$\xi_n(-1) = \xi_n(e_1 e_1) = \mathrm{Ref}_{e_1} \circ \mathrm{Ref}_{e_1} = \mathrm{id}$$

からわかる．逆は省略する．

1.3 スピノール表現

ベクトル空間への群の作用を，その群の表現という．すなわち群 G の表現とは，ベクトル空間 V と群準同型

$$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

の組のことである．G がリー群の場合は ρ に滑らかさを課す．ある部分空間 $W \subset V$ の中で G の作用が閉じているとき，すなわち $\rho(G)(W) \subset W$ となるとき W を部分表現という．$0, V$ は必ず部分表現になるが，ρ がそれ以外の部分表現を持たないならば ρ は既約であるという．

ベクトル空間へのクリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ の作用を，$\mathbb{C}l_n$ の表現という．すなわち $\mathbb{C}l_n$ の表現とは，ベクトル空間 V と代数準同型

$$\chi\colon \mathrm{C}l_n \to \mathrm{End}(V)$$

の組のことである．既約性なども同様に定義される．

例 1.10. $n = 2m$ のときは $\mathbb{C}l_{2m} \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$ であった．そこでこの同型の下で $\mathbb{C}l_{2m}$ の表現

$$\chi\colon \mathbb{C}l_{2m} \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) \ni \phi \mapsto \phi \in M_{2^m}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$$

が得られる．

例 1.11. $n = 2m+1$ のときは $\mathbb{C}l_{2m+1} \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{C})$ であった．そこでこの同型の下で $\mathbb{C}l_{2m+1}$ の表現

$$\chi^+\colon \mathbb{C}l_{2m+1} \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{C}) \ni (\phi, \psi) \mapsto \phi \in M_{2^m}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$$

$$\chi^-\colon \mathbb{C}l_{2m+1} \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{C}) \ni (\phi, \psi) \mapsto \psi \in M_{2^m}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$$

が得られる．これらは互いに同値でない表現である．

> **命題 1.12.** 上で得られたクリフォード代数の表現は既約表現である．そしてクリフォード代数の既約表現は (同値なものを除いて) これで全てである．

クリフォード代数の表現をスピン群へ制限することで得られる表現をスピノール表現という．

定義 1.13. 上で得られた $\mathbb{C}l_n$ の表現を $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l$ へ制限すると $\mathrm{Spin}(n)$ の表現 (ρ_n, Σ_n) が得られる．すなわち $\rho_n = \chi^{(\pm)}|_{\mathrm{Spin}(n)}$, $\Sigma_n = \mathbb{C}^{2^m}$ である．この表現をスピ

ノール表現といい，表現空間 Σ_n をスピノール空間，スピノール空間の元をスピノールという．

注意 1.14. $n = 2m+1$ のときはクリフォード代数の既約表現には ρ_+, ρ_- という 2 つの非同値な表現がある．しかし，これらを $\mathrm{Spin}(n)$ へ制限すると同値な表現になる．したがって $n = 2m+1$ のときはどちらの表現から作ったスピノール表現も同値な表現になる．これは, $\mathrm{Spin}(n)$ の元を $\mathbb{C}l_n \cong M_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{C})$ の元として表すと $(A, A)\,(A \in M_{2^m}(\mathbb{C}))$ となることからわかる．

注意 1.15. そもそも Σ_n はクリフォード代数の表現空間であったから，クリフォード代数も Σ_n に作用することに注意する．

$\rho\colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(V)$ を $\mathrm{SO}(n)$ の表現とすると，これは $\mathrm{Spin}(n)$ の表現に持ち上げることができる．実際，$\tilde{\rho} = \rho \circ \xi_n\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(V)$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の表現である．逆に $\mathrm{Spin}(n)$ の表現は必ずしも $\mathrm{SO}(n)$ の表現から得られるとは限らない．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(n) & & \\ {\scriptstyle \xi_n}\downarrow & \searrow^{\tilde{\rho}} & \\ \mathrm{SO}(n) & \xrightarrow[\rho]{} & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

> **命題 1.16.** スピノール表現 ρ_n は $\mathrm{SO}(n)$ の表現からは得られない，$\mathrm{Spin}(n)$ 独自の表現である．すなわち $\rho_n = \rho \circ \xi_n$ となる群準同型 $\rho\colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(\Sigma_n)$ は存在しない．

証明. もしそのような ρ が存在するなら，$-1 \in \mathrm{Spin}(n)$ の行き先を考えることで

$$-\mathrm{id} = \rho_n(-1) = \rho(\xi_n(-1)) = \rho(1) = \mathrm{id}$$

となり矛盾する． □

注意 1.17. n が奇数のときスピノール表現は既約表現であるが，n が偶数のときは既約表現ではない．$n = 2m$ のとき (複素) 体積要素 ω が

$$\omega = i^m e_1 \cdots e_{2m}$$

で定義され，$\omega^2 = 1$ である．$\mathbb{C}l_n$ も Σ_n に作用するから，この作用のもとで ω は固有値 ± 1 を持ち，固有空間分解 $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ できる．$\Sigma_n^\pm$ はスピノール表現の部分表現であり，さらにこれらは既約である．すなわちスピノール表現は次の既約分解を持つ．

$$\rho_n = \rho_n^+ \oplus \rho_n^-, \quad \rho_n^\pm\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Sigma_n^\pm).$$

また，この 2 つの既約成分はベクトルによる積で入れ替わる．すなわち $v \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in \Sigma_n^{\pm}$ に対して $v \cdot \psi \in \Sigma_n^{\mp}$ となる．

例 1.18 ($n = 3$)**.** 命題 1.6 より $\mathbb{C}l_3 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ である．この同型のもとで Spin(3) を表すと

$$\mathrm{Spin}(3) = \{(A, A) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \mid A \in \mathrm{SU}(2)\} \cong \mathrm{SU}(2)$$

となる (定理 1.9, 注意 1.14 も参照)．したがって Spin(3) のスピノール表現 ρ_3 は，$\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ の同型を通して見れば単に SU(2) の自然表現 $\rho_3 = \mathrm{id}\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ のことである．

2 準備 (幾何)

2.1 リーマン多様体

多様体に各点の接空間に内積の構造を与え，“大きさ” や “角度” の概念を定義できるようにしたものがリーマン多様体である．

定義 2.1. M を多様体とする．各点 $p \in M$ に対して正定値内積 $g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を与える滑らかな対応 $g \colon p \mapsto g_p$ を，M 上のリーマン計量という．ここで $g \colon p \mapsto g_p$ が滑らかであるとは，任意のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$g(X,Y) \colon M \ni p \mapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$$

が滑らかであることをいう．また正定値内積とは次の条件が成り立つものである．

(双線型性)　g_p は第 1 成分, 第 2 成分の両方について線型である．
(対称性)　任意の $X_p, Y_p \in T_pM$ に対して $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$ が成り立つ．
(正定値性)　任意の $X_p \in T_pM$ に対して $g(X_p, X_p) \geq 0$ であり，等号は $X_p = 0$ のときに限る．

定義 2.2. 多様体 M とそのリーマン計量 g の組 (M, g) をリーマン多様体という．

例 2.3. $M = \mathbb{R}^n$ のとき，任意の点 $p \in M$ に対して自然に $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ である．したがって各点 $p \in M$ に対して g_p をこの同型のもとでの標準内積とすれば，g は $\mathbb{R}^n$ 上の (標準的な) 計量である．

定理 2.4. 任意の多様体はリーマン計量を持つ.

証明. (概要) 多様体 M は局所的には $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相であるから，チャート $U \subset M$ 上には例 2.3 の方法でリーマン計量を構成できる．そこでアトラスの各チャート U 上で定義された計量を 1 の分割を用いて貼り合わせれば，M 上の計量が得られる． □

2.2 ベクトル束

2.2.1 ベクトル束の定義

多様体 M に対して接束と呼ばれる多様体 $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ が定義されるのであった．自然な射影 $\pi\colon TM \to M$ は，$T_pM = \pi^{-1}(p)$ で定義される．すなわち接束は組 (π, TM, M) であって，各点 $p \in M$ に対して接空間というベクトル空間 $\pi^{-1}(p)$ を対応させるものであると思える．接束に多様体の構造を導入するときの方法を思い出すと，チャート $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に対して

$$\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \mapsto (p, a^1(p), \cdots, a^n(p))$$

という微分同相写像があった．これは接束が局所的には $U \times \mathbb{R}^n$ という直積の形になっているということを意味する．このような接束の満たす性質を一般化し，各点上に何かベクトル空間を対応させるようなものを考えたい.

定義 2.5. E, M を多様体，$\pi\colon E \to M$ を滑らかな全射とする．(π, E, M) がランク r のベクトル束であるとは次の条件を満たすことをいう.

(i) 各点 $p \in M$ に対して，p 上のファイバー $E_p = \pi^{-1}(p)$ は実 r 次元ベクトル空間の構造を持つ.

(ii) 各点 $p \in M$ に対して，その近傍 U とファイバーを保つ微分同相写像

$$\phi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$$

が存在し，各ファイバー上では ϕ_U は線型同型である．つまり，任意の $q \in U$ に対して $\phi_U|_{\pi^{-1}(q)}\colon \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^r$ が定義され，これが線型同型であるということである．またこの ϕ_U を局所自明化という (図 2.1).

注意 2.6. (π, E, M) がベクトル束であるという代わりに $\pi\colon E \to M$ がベクトル束であるなどと表現することも多い．または射影 π の定義に共通認識が取れる場合は単に E だけを指してベクトル束ということもある.

例 2.7. M を n 次元多様体とすると，その接束 TM はランク n のベクトル束である．

例 2.8. $\pi\colon M \times \mathbb{R}^r \to M$, $\pi(p, v) = p$ はランク r のベクトル束である．この場合は局所自明化を与える開集合として多様体全体 M が取れる．このようなベクトル束は自明束と呼ばれる．

例 2.9. $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ を $(0, t) \sim (2\pi, -t)$ という同一視で貼り合わせたものを E とする．E は Möbius の帯の幅を無限に長くしたものである．$\pi\colon E \to S^1$, $\pi(\theta, t) = e^{i\theta}$ によって E は S^1 上のランク 1 のベクトル束である (図 2.1).

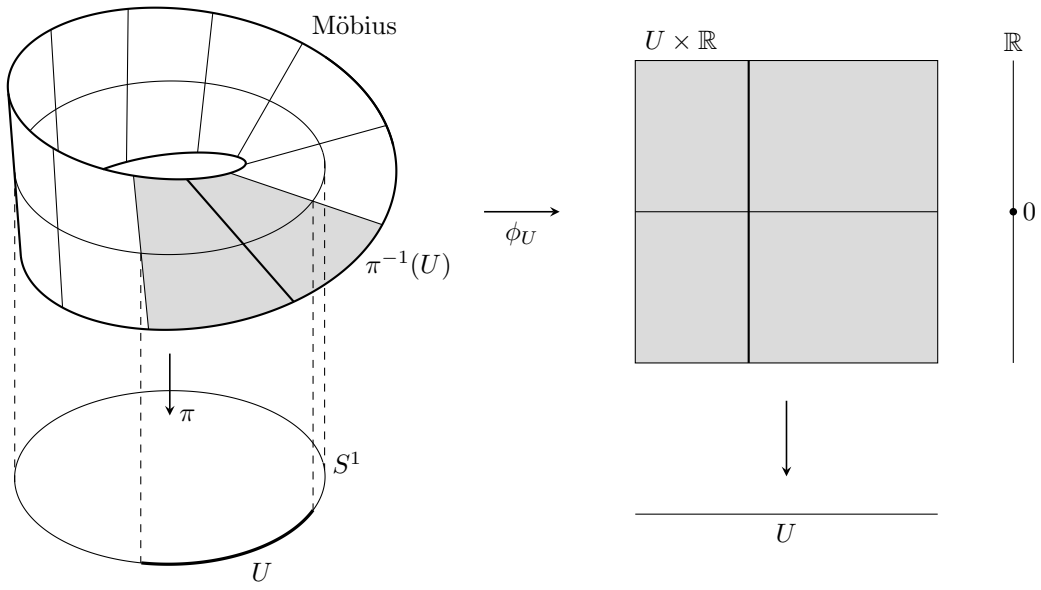


図 2.1

多様体上にはベクトル場が定義される．ベクトル場は多様体の各点 $p \in M$ に対して，その接空間の元 $X_p \in T_pM$ を対応させるものであった．写像として書けば $X\colon M \to TM$ である．ここで $X(p) \in T_pM$ でなければいけないことに注意する．これは言い換えれば $\pi(X(p)) = p\,(\forall p \in M)$ ということである．そこで一般のベクトル束にもベクトル場に対応するものを定義する．

定義 2.10. $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする．開集合 $U \subset M$ に対して滑らかな写像 $s\colon U \to E$ が $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ を満たすとき，s をベクトル束 E の U 上の (局所) 切断という．U 上の切断全体の集合を $\Gamma(U, E)$ と書く．$U = M$ のとき $\Gamma(M, E)$ を単に $\Gamma(E)$ と書き，$\Gamma(E)$ の元を大域切断という．各点ごとに和やスカラー倍を定義することで $\Gamma(U, E)$ は自然に $C^\infty(M)$-加群の構造を持つ．

例 2.11. M 上の滑らかな関数とは自明束 $M \times \mathbb{R}$ の切断のことである．すなわち $\Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M)$ である．

例 2.12. ベクトル場とは接束の切断のことである．すなわち $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ である．

例 2.13. 1 次微分形式とは余接束の切断のことである．すなわち $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ である．

2.2.2 ベクトル束の接続

X, Y を $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場とすると

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (a^i, b^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$$

とかける．Y の X による方向微分は

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X b^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^n a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で定義される．すなわち各成分を方向微分するのである．D は写像としては

$$D \colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \quad D(X, Y) := D_X Y$$

である．次の性質が成り立つことは明らかである．

命題 2.14. 上で定義した $\mathbb{R}^n$ 上の方向微分 D は (i)$\mathbb{R}$-双線型であり，(ii) 第一成分については $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-線型，(iii) 第二成分についてはライプニッツ則が成り立つ．

(i) D は第 1 成分, 第 2 成分の両方について $\mathbb{R}$-線型である．
(ii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $D_{fX} Y = f D_X Y$ が成り立つ．
(iii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $D_X fY = (Xf)Y + f D_X Y$ が成り立つ．

一般のベクトル束の切断に対しても方向微分に相当する概念が欲しい．それが次に定義する接続である．

定義 2.15. $E \to M$ をベクトル束とする．E 上の接続とは写像 $\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ であって次の条件が成り立つものである．

(i) ∇ は第 1 成分, 第 2 成分の両方について $\mathbb{R}$-線型である．

(ii) 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$ が成り立つ.

(iii) 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\nabla_X fs = (Xf)s + f\nabla_X s$$

が成り立つ.

ここで $\nabla_X s := \nabla(X, s)$ と表記している.

注意 2.16. 通常，微分を計算するには近い 2 点における値の差を計算する必要がある．しかし切断 s の場合，相異なる 2 点 p, q に対して $s(p), s(q)$ は異なるベクトル空間に属しているので，その差 "$s(p) - s(q)$" が意味を持たない．$\mathbb{R}^n$ 上の接束の場合は，各接空間の間に標準的な同型 $T_pM \cong \mathbb{R}^n \cong T_qM$,

$$\sum_{i=1}^n a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \quad (a^i \in \mathbb{R})$$

があるので，この同型のもとで各接空間を同一視することで差 $Y(p) - Y(q)$ が意味を持ち，方向微分 D を定義できた．一般のベクトル束では各ファイバー間に標準的な同一視がないため，$\mathbb{R}^n$ のベクトル場のときと同じようには方向微分を定義することができず，方向微分の性質を満たす写像として定義するのである．実はベクトル束に接続が与えられると，その接続に対応したファイバー間の同型が得られる[*1]．この意味で，接続は相異なる点上のファイバーを "接続" するものなのである.

接束もベクトル束であるから接束にも接続が定義される．$\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ であるから接束の接続は

$$\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

である.

定理 2.17 (リーマン幾何学の基本定理)**.** (M, g) をリーマン多様体とする．接束 TM の接続 ∇ で次の性質を満たすものが一意的に存在する：任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

(torsion-free) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ が成り立つ.

(計量的) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ が成り立つ.

この接続 ∇ を Levi-Civita 接続と呼ぶ.

[*1] 正確には底空間 M 上の曲線に沿った同型が与えられる．異なる曲線から得られる同型は異なる写像の場合もある.

接束の接続 ∇ に対して $T^\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ で定義される $T^\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を捩率テンソルという．すなわち 1 つ目の条件は $T^\nabla = 0$ ということである．また 2 つ目の条件において

$$g(Y,Z)\colon M\to\mathbb{R},\quad p\mapsto g_p(Y_p,Z_p)$$

により $g(X,Y)$ を M 上の滑らかな関数とみなしている．

例 2.18. $M=\mathbb{R}^n$ のとき Levi-Civita 接続は上で与えた方向微分 D である．

2.3 主束

2.3.1 主束の定義

ベクトル束は多様体の各点の上にベクトル空間を対応させるものであった．主 G 束は多様体の各点の上にリー群 G を対応させるようなものである．

リー群 G の多様体 P への右作用とは滑らかな写像

$$P\times G\to P,\quad u\mapsto u\cdot g$$

であり，任意の $u\in P$ と任意の $g_1,g_2\in G$ に対して $u\cdot(g_1g_2)=(u\cdot g_1)\cdot g_2$ と $u\cdot e=u$ が成り立つものである．$e\in G$ は単位元である．

定義 2.19. G をリー群，P,M を多様体とする．$\pi\colon P\to M$ が主 G 束であるとは以下を満たすことである．

(i) π は滑らかな全射である．

(ii) P に G が右から作用し，その作用はファイバー $P_x=\pi^{-1}(x)$ を保つ．さらに P_x への G の右作用は自由かつ推移的である[*2]．

(iii) G 同変な局所自明化を持つ．すなわち, 各点 $x\in M$ に対して開近傍 U と微分同相

$$\Phi_U\colon \pi^{-1}(U)\ni u\mapsto(\pi(u),\phi_U(u))\in U\times G$$

で $\phi_U(ug)=\phi_U(u)g$ を満たすものがある．

注意 2.20. 主 G 束のファイバーはリー群と微分同相であるが，群構造を持つわけではない．これはベクトル束と異なる点であり，注意が必要である．

[*2] 集合 S への G の右作用が自由であるとは, 任意の $x\in S$ に対して固定部分群 $G_x=\{g\in G\mid x\cdot g=x\}$ が自明群であることである．作用が推移的であるとは任意の 2 点 $x,x'\in S$ に対して $x'=x\cdot g$ となる $g\in G$ が存在することをいう．

例 2.21. M を n 次元多様体とする．各 $p \in M$ に対して

$$L_p = \{(X_1, \cdots, X_n) \mid X_1, \cdots, X_n \in T_pM \text{ は基底である } \}$$

とし，

$$P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M := \bigcup_{p \in M} L_p$$

とすると $P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M \to M$ は主 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 束である[*3]．実際，基底は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の作用 (行列の積) で互いに写り合う．

例 2.22. (M, g) をリーマン多様体とする．各 $p \in M$ に対して

$$L_p = \{(X_1, \cdots, X_n) \mid X_1, \cdots, X_n \in T_pM \text{ は正規直交基底である } \}$$

とし，

$$P_{\mathrm{O}(n)}M := \bigcup_{p \in M} L_p$$

とすると $P_{\mathrm{O}(n)}M \to M$ は主 $\mathrm{O}(n)$ 束である．実際，正規直交基底は $\mathrm{O}(n)$ の作用 (行列の積) で互いに写り合う．

例 2.23. (M, g) を向き付けられたリーマン多様体とする．各 $p \in M$ に対して

$$L_p = \{(X_1, \cdots, X_n) \mid X_1, \cdots, X_n \in T_pM \text{ は正の向きの正規直交基底である } \}$$

とし，

$$P_{\mathrm{SO}(n)}M := \bigcup_{p \in M} L_p$$

とすると $P_{\mathrm{SO}(n)}M \to M$ は主 $\mathrm{SO}(n)$ 束である．実際，正の向きの正規直交基底は $\mathrm{SO}(n)$ の作用 (行列の積) で互いに写り合う．

ベクトル束と同様に主束にも切断を定義する．

定義 2.24. $\pi\colon P \to M$ を主 G 束とする．開集合 $U \subset M$ に対して滑らかな写像 $s\colon U \to P$ が $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ を満たすとき，s を主 G 束 P の U 上の (局所) 切断という．U 上の切断全体の集合を $\Gamma(U, P)$ と書く．$U = M$ のとき $\Gamma(M, P)$ を単に $\Gamma(P)$ と書き，$\Gamma(P)$ の元を大域切断という．

注意 2.25. P が大域切断を持つことは P が自明束 $P \cong M \times G$ であることと同値である．これはベクトル束の場合とは異なる点であり注意が必要である．

例 2.26. 例 2.21，2.22，2.23 を思い出す．

[*3] 本当は $P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M$ に多様体の構造を与えたりしなければいけないが，ここでは省略する．

(i) $P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M$ の切断は，多様体上の各点に接空間の基底を対応させるものである．

(ii) $P_{\mathrm{O}(n)}M$ の切断は，多様体上の各点に接空間の正規直交基底を対応させるものである．

(iii) $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ の切断は，多様体上の各点に接空間の正の向きの正規直交基底を対応させるものである．

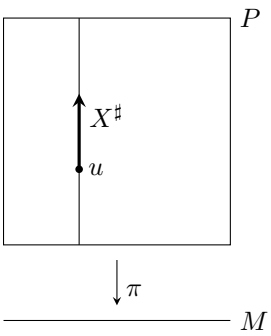
2.3.2　主束の接続形式

本稿を読み進めるにあたって本節の内容で最も大事なのは，主束の接続形式は「$\mathfrak{g}$ に値を取る P 上の 1-form である」ということである．基本ベクトル場や主束の接続形式の詳細な定義については今後用いないので，初学の場合は読み飛ばしても差し支えない．

主束の接続形式を定義するために基本ベクトル場について説明する．G をリー群，$\pi\colon P \to M$ を主 G 束とし，G のリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp(tX)\,(t \in \mathbb{R})$ は $t = 0$ で単位元を通る G 上の曲線である．そこで $u \in P$ に対して $u \cdot \exp(tX)$ を考えると，これは $t = 0$ で u を通るファイバー方向の曲線である．X に対する基本ベクトル場 $X^\sharp \in \mathfrak{X}(P)$ とは

$$X^\sharp_u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \cdot \exp(tX), \quad (u \in P)$$

である．定義から明らかに $X^\sharp$ はファイバー方向を向いたベクトル場である．すなわち $\pi_*(X^\sharp) = 0$ である．



定義 **2.27.** P 上の接続形式とは P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form[*4] $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ で次を満たすものである．

(G 同変性)　任意の $g \in G$ に対して $r_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ が成り立つ．

(垂直的)　任意の $u \in P$ と任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega_u(X^\sharp_u) = X$ である．

[*4] $\mathfrak{g}$ 値 1-form は写像としては $\omega\colon TP \to \mathfrak{g}$ である．

ここで $g \in G$ に対して $r_g \colon P \to P,\ u \mapsto u \cdot g$ は右作用である．また $\mathrm{Ad}(g^{-1}) \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は随伴表現[*5]である．

多様体に計量などの構造が入ると，それに対応して接束から主束を構成できたのであった (例 2.21，2.22，2.23)．そこで接束の接続からそれらの主束に接続を定義することができる．ここではスピン接続の定義に必要な，$P_{\mathrm{SO}(n)}M$ に誘導される接続形式についてのみ説明する．

(M, g) を向きづけられた n 次元リーマン多様体とし，∇ を Levi-Civita 接続とする．$U \subset M$ の開集合とし $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ の U 上の切断とする．すなわち，任意の点 $p \in U$ に対して $e(p) = (e_1(p), \cdots, e_n(p))$ は T_pM の正の向きの正規直交基底である．U 上の 1-from $\omega_j^i \in \Omega^1(U)\,(1 \leq i, j \leq n)$ を次のように定義する．

$$\nabla_X e_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_j^i(X) e_i \quad (X \in \mathfrak{X}(U)).$$

この ω_j^i について

$$\omega_j^i = -\omega_i^j$$

が成り立つ．実際 ∇ が計量的であることから，任意の $X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\omega_j^i(X) = g(\nabla_X e_j, e_i) = Xg(e_j, e_i) - g(e_j, \nabla_X e_i) = 0 - \omega_i^j(X)$$

である．したがって

$$\omega_e(X) = \left(\omega_j^i(X)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_1^1(X) & \cdots & \omega_n^1(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^n(X) & \cdots & \omega_n^n(X) \end{pmatrix}$$

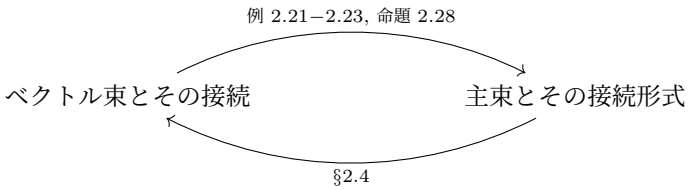
とすると ω_e は交代行列 $\mathfrak{so}(n)$ に値を取る U 上の 1-form である．添え字の e は ω_e の定義が正の向きの正規直交基底 e の取り方に依存していることを表している．

> **命題 2.28.** $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ 上の接続 $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{SO}(n)}M) \otimes \mathfrak{so}(n)$ であって，任意の局所切断 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ に対して
>
> $$e^*\omega = \omega_e$$
>
> となるものが存在する．ここで $e \colon U \to P_{\mathrm{SO}(n)}M$ であるから e によって $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ 上の微分形式 ω を引き戻して U 上の微分形式にできることに注意せよ．

[*5] G が行列リー群の場合は $\mathfrak{g}$ の元も行列であり，$\mathrm{Ad}(g^{-1})(X) = g^{-1}Xg$ である．この右辺は単なる行列の積である．

2.4　同伴ベクトル束

これまでにベクトル束と主束という 2 つのファイバー束について説明してきた．そして，ベクトル束 (特に接束) から主束が構成できること，ベクトル束の接続から主束の接続形式が構成できることについて説明した．ここでは逆に主束からベクトル束を構成すること，主束の接続形式からベクトル束の接続が構成できることについて説明する．



まずは主束から同伴ベクトル束を作る．

定義 2.29. $\pi_P\colon P \to M$ を主 G 束，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を表現 (群準同型) とする．$P \times V$ に G の右作用を

$$(u, v) \cdot g = (ug, \rho(g^{-1})v)$$

で定義し，この作用による商を $E := P \times_\rho V := (P \times V)/G$ と書くことにする．代表元を $(u, v) \in P \times V$ とする同値類を $[u, v] \in P \times_\rho V$ で表す．$P \times_\rho V$ には多様体の構造が入る．さらに

$$\pi_E\colon E = P \times_\rho V \to M, \quad \pi_E([u, v]) = \pi_P(u)$$

と定めるとこれは well-defined であり，$x \in M$ に対して

$$\pi_E^{-1}(x) = \{[u, v] \mid v \in V\} \quad (u \in \pi_P^{-1}(x) \text{ を任意に 1 つ固定})$$

である．各 $x \in M$ のファイバー E_x には

$$[u, v] + [u, w] := [u, v + w]$$
$$k[u, v] := [u, kv], \quad (k \in \mathbb{R})$$

によって和とスカラー倍が定義される[*6]．したがって $\pi_E\colon E \to M$ はランク $\dim V$ のベクトル束である．

大雑把に言えば，主 G 束と表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ があれば，表現空間 V をファイバーとするようなベクトル束が構成できるということである．

[*6] これは $u \in \pi_P^{-1}(x)$ の取り方に依らないため well-defined である．

例 2.30. 例 2.21 の場合を考える．$G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の自然表現 $\rho_{\mathrm{nat}} = \mathrm{id}\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ から得られる同伴ベクトル束は

$$P_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}M \times_{\rho_{\mathrm{nat}}} \mathbb{R}^n \cong TM$$

である．実際

$$\left[(e_1,\cdots,e_n), \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}\right] \quad \mapsto \quad a^1e_1 + \cdots + a^ne_n$$

で同型が与えられる．$G = \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ の場合も全く同様に自然表現によって

$$P_{\mathrm{O}(n)}M \times_{\rho_{\mathrm{nat}}} \mathbb{R}^n \cong TM, \quad P_{\mathrm{SO}(n)}M \times_{\rho_{\mathrm{nat}}} \mathbb{R}^n \cong TM$$

となる．

次に主束の接続形式から同伴ベクトル束上に接続を誘導する．

定義 2.31. $P \to M$ を主 G 束，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を表現，$\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ を P の接続形式とする．$E := P \times_\rho V$ を同伴ベクトル束とする．E の切断 s は局所的に U 上で

$$s(p) = [u(p), v(p)] \quad (s \in \Gamma(U,P),\ v\colon U \to V,\ p \in U)$$

と表せる．このとき E 上の接続 ∇ を

$$(\nabla_X s)_p = [u(p), (Xv)(p) + \rho_*(\omega(u_*X_p))v(p)] \quad (X \in \mathfrak{X}(U),\ p \in U)$$

で定めると well-defined であり，接続の定義も満たす．

注意 2.32. ここで Xv はベクトル空間値関数の微分である．これは次のように定義される．V の基底を 1 つ固定し $e_1,\cdots,e_n$ とする．$v\colon U \to V$ であるから，この基底に関して

$$v = \sum_{i=1}^n a^i e_i \quad (a^i \in C^\infty(U))$$

と展開できる．このとき Xv を係数関数の微分

$$Xv = \sum_{i=1}^n (Xa^i)e_i$$

で定める．これは基底の取り方に依らない．

例 2.33. (M,g) を向き付けられたリーマン多様体とし，∇ を Levi-Civita 接続とする．命題 2.28 により定義される $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ 上の接続形式を ω とする．ω から $P_{\mathrm{SO}(n)}M \times_{\rho_{\mathrm{nat}}} \mathbb{R}^n \cong TM$ 上に誘導される接続は Levi-Civita 接続 ∇ になる．

3 スピン多様体

3.1 スピン構造

定義 **3.1.** (M, g) を向き付けられたリーマン多様体とする．M 上のスピン構造とは主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $P_{\mathrm{Spin}(n)}M \to M$ であって，ファイバーを保つ滑らかな写像 $\Phi\colon P_{\mathrm{Spin}(n)}M \to P_{\mathrm{SO}(n)}M$ が存在して

$$\Phi(ug) = \Phi(u)\xi(g), \quad (\forall u \in P_{\mathrm{Spin}(n)}M, \forall g \in \mathrm{Spin}(n))$$

が成り立つものである．ここで $\xi\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ は二重被覆である．

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times \mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi\times\xi} & P_{\mathrm{SO}(n)}M \times \mathrm{SO}(n) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{右作用}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{右作用}} \\ P_{\mathrm{Spin}(n)}M & \xrightarrow{\Phi} & P_{\mathrm{SO}(n)}M \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M & \end{array}$$

すなわち M のスピン構造とは，M 上の主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ であって二重被覆 $\xi\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ と compatible な $P_{\mathrm{Spin}(n)}M \to P_{\mathrm{SO}(n)}$ が存在するものである．

定義 **3.2.** 向き付けられたリーマン多様体 (M, g) にスピン構造を 1 つ指定したものをスピン多様体という．

注意 3.3. スピン構造は必ず存在するわけではない．スピン構造が存在するかどうかは位相的な条件であり，(M, g) がスピン構造を持つための必要十分条件は M の 2 次の Stiefel-Whitney 類が消えることである．

3.2 スピノール場

3.2.1 スピノール場の定義

ベクトル場は多様体の各点に接ベクトルを対応させるものであった．そこで，多様体の各点にスピノールを対応させるものとしてスピノール場を定義したい．そのためには各ファイバーがスピノール空間 Σ_n であるようなベクトル束を作る必要があるが，これは同伴ベクトル束として実現することができる．

定義 3.4. (M, g) をスピン多様体，$P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ をスピン構造とする．スピノール表現 $\rho_n\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Sigma_n)$ によって得られる同伴ベクトル束

$$\Sigma M := P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\rho_n} \Sigma_n$$

をスピノール束という．スピノール束の切断をスピノール場という．

n が偶数のとき，スピノール表現は既約ではなく，2 つの既約成分に分解 $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ できるのであった (注意 1.17)．これに対応してスピノール束も分解できる．

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M, \quad \Sigma^\pm M = P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\rho_n^\pm} \Sigma^\pm$$

3.2.2 スピノール束へのクリフォード束の作用

スピノール空間 Σ_n にはクリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ も作用するのであった．クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ にはベクトル $\mathbb{R}^n$ も含まれるから，特にベクトルはスピノールに作用する．この関係は多様体上に持ち上がる．すなわち，ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ はスピノール場 $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ に作用する．

まずファイバーがクリフォード代数であるようなベクトル束 $\mathbb{C}l(M)$ を構成する．スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ の実クリフォード代数 $\mathrm{C}l_n$ への表現を

$$\mathrm{Ad}(g)(v_1 \cdots v_k) = g v_1 \cdots v_k g^{-1} \quad (g \in \mathrm{Spin}(n), v_i \in \mathrm{C}l_n)$$

で定義し，これを複素線型に拡張することで表現 $\mathrm{Ad}^{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}l)$ を得る．そこでこの表現による同伴ベクトル束を

$$\mathbb{C}l(M) = P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\mathrm{Ad}^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}l_n$$

とする[*1]．$TM \subset \mathbb{C}l(M)$ であるから，この意味でベクトル場はスピノール場に作用する．

> **命題 3.5.** 複素クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ のスピノール空間への作用をクリフォード積といい $\phi \cdot \psi\,(\phi \in \mathbb{C}l_n, \psi \in \Sigma_n)$ で表す．クリフォード積は $\mathrm{Spin}(n)$ 同変である．すなわち
> $$g(\phi \cdot \psi) = (\mathrm{Ad}^{\mathbb{C}}(g)(\phi)) \cdot (g\psi)$$
> が成り立つ．

証明.
$$(\mathrm{Ad}^{\mathbb{C}}(g)(\phi))(g\psi) = (g\phi g^{-1})(g\psi) = g\phi\psi$$
である． □

クリフォード束 $\mathbb{C}l(M)$ の切断 $\tilde{\phi}$，スピノール束 ΣM の切断 $\tilde{\psi}$ は局所的に
$$\tilde{\phi} = [u, \phi] \quad (u \in \Gamma(U, P_{\mathrm{Spin}(n)}M), \phi\colon U \to \mathbb{C}l_n)$$
$$\tilde{\psi} = [u, \psi] \quad (u \in \Gamma(U, P_{\mathrm{Spin}(n)}M), \psi\colon U \to \Sigma_n)$$
と表せるから，
$$\tilde{\phi} \cdot \tilde{\psi} = [u, \phi \cdot \psi]$$
として束でのクリフォード積を定義する．これが well-defined であることは $\mathrm{Spin}(n)$ 同変性 (命題 3.5) から従う．

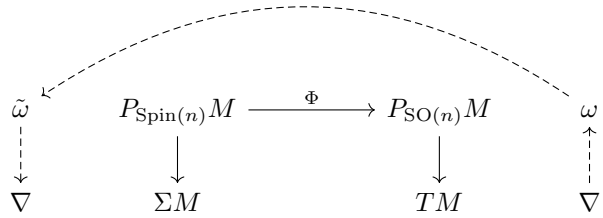
3.3 スピン接続

スピノール束には M の Levi-Civita 接続から誘導される接続が入る．$\xi\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ は被覆写像であるから，単位元での微分
$$\xi_*\colon \mathfrak{spin}(n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(n)$$
はリー代数の同型であることに注意する．

定義 3.6. (M, g) をスピン多様体，$P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ をスピン構造，ΣM をスピノール束とする．(M, g) の Levi-Civita 接続を ∇ とすると，$P_{\mathrm{SO}(n)}M$ 上に接続 ω が定義される (命題 2.28)．ω は $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form であるが，同型 $\xi_*\colon \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ を通して $\mathfrak{spin}(n)$ 値 1-form と思うことができる．そこで $\Phi\colon P_{\mathrm{Spin}(n)}M \to P_{\mathrm{SO}(n)}M$ で引き戻すことで，$P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ の接続形式
$$\tilde{\omega} = (\xi_*)^{-1} \circ \Phi^*\omega \in \Omega(P_{\mathrm{Spin}(n)}M) \otimes \mathfrak{spin}(n)$$

[*1] $\mathbb{C}l(M)$ の各ファイバーは各接空間 (T_pM, g_p) から得られるクリフォード代数と思える．

が得られる．そして定義 2.31 によって $\tilde{\omega}$ から ΣM 上に接続が誘導される．この ΣM 上の接続も同じ ∇ で表し，スピン接続という．



スピン接続と同様に，$\mathbb{C}l(M)$ にも接続が誘導されるが，これも ∇ で表す．スピン接続の性質に関して後で必要なものを述べておく．

命題 3.7. スピン接続について次が成り立つ．

(i) クリフォード積に関してライプニッツ則が成り立つ．すなわち

$$\nabla_X(\phi \cdot \psi) = (\nabla_X \phi) \cdot \psi + \phi \cdot (\nabla_X \psi)$$

が成り立つ．ここで $\phi \in \Gamma(\mathbb{C}l(M)), \psi \in \Gamma(\Sigma M), X \in \mathfrak{X}(M)$ である．特にベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ によるクリフォード積に関して

$$\nabla_X(Y \cdot \psi) = (\nabla_X Y) \cdot \psi + Y \cdot (\nabla_X \psi)$$

となるが，このときの $\nabla_X Y$ は Levi-Civita 接続によるものと一致する．

(ii) n が偶数のとき，スピノール束は分解 $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ されるのであった．スピン接続はこの分解を保つ．すなわち $\psi \in \Gamma(\Sigma^{\pm})$ に対して $\nabla_X \psi \in \Gamma(\Sigma^{\pm})$ である．

3.4　ディラック作用素

定義 3.8. (M, g) をスピン多様体とする．また，$e_1, \cdots, e_n \in \mathfrak{X}(U)\,(U \subset M)$ を U 上各点で正規直交基底であるようなベクトル場とする．

$$\mathcal{D}\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi$$

で定義される $\mathcal{D}\colon \Gamma(\Sigma M) \to \Gamma(\Sigma M)$ をディラック作用素という．ディラック作用素の定義は $e_1, \cdots, e_n$ の取り方に依らないため，多様体全体で定義される．

例 3.9. $M=\mathbb{R}^n$ の場合を考える．$\mathbb{R}^n$ の主 $\mathrm{SO}(n)$ 束は自明束 $P_{\mathrm{SO}(n)}\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n\times\mathrm{SO}(n)$ であり，スピン構造も自明束 $P_{\mathrm{Spin}(n)}\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n\times\mathrm{Spin}(n)$ である．したがってスピノール束も自明束 $\Sigma\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\Sigma_n$ であるから，$\mathbb{R}^n$ 上のスピノール場とは単に $\psi\colon\mathbb{R}^n\to\Sigma_n$ である．またスピン接続も単なる微分

$$\nabla_{e_i}\psi=\nabla_{\partial_i}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\quad\left(e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

で与えられる．ここで右辺の微分は注意 2.32 の意味である．よってディラック作用素は

$$\mathcal{D}\psi=\sum_{i=1}^n e_i\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$$

であり

$$\mathcal{D}^2=-\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^2\psi&=\sum_{i,j=1}^n e_j\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\left(e_i\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right)\\
&=\sum_{i,j=1}^n e_j\cdot\left((\nabla_{\partial_j}e_i)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+e_i\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^i}\right)\\
&=\sum_{i,j=1}^n e_j\cdot e_i\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^i}\\
&=\sum_{i=1}^n e_i\cdot e_i\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^i}+\sum_{i<j}(e_j\cdot e_i+e_i\cdot e_j)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^i}\\
&=-\sum_{i=1}^n\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^i}-\sum_{i<j}2\delta_{ij}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^i}\\
&=-\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2\psi
\end{aligned}$$

となる．

命題 3.10. (M,g) を偶数次元スピン多様体とする．このとき $\psi\in\Gamma(\Sigma^\pm M)$ に対して $\mathcal{D}\psi\in\Gamma(\Sigma^\mp M)$ となる．すなわちスピノール束の分解 $\Sigma M=\Sigma^+M\oplus\Sigma^-M$ に関して

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}0&\mathcal{D}^-\\ \mathcal{D}^+&0\end{pmatrix},\quad\mathcal{D}^\pm\colon\Gamma(\Sigma^\pm)\to\Gamma(\Sigma^\mp)$$

と表すことができる．

証明. スピン接続がスピノール束の分解を保つこと (命題 3.7) と，ベクトルの積で既約成分が入れ替わること (注意 1.17) を思い出せば定義から明らかである. □

ディラック作用素に関する重要な定理を 1 つ紹介する.

定理 3.11 (Lichnerowicz 公式)**.** n 次元スピン多様体 M 上のディラック作用素を $\mathcal{D}$ として，$\Delta = \nabla^*\nabla$ を (接続) ラプラシアンとすれば

$$\mathcal{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Scal}\colon M \to \mathbb{R}$ は M のスカラー曲率を表す.

注意 3.12. 接続ラプラシアンは，点 $p \in M$ 周りの正規座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を用いて[*2]，

$$(\nabla^*\nabla\psi)_p = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_i}\psi)_p$$

となる.

ディラック作用素の 2 乗と (接続) ラプラシアンは共に 2 階の微分作用素であるが，その差はもはやスカラーになってしまう．さらにそのスカラーは多様体の曲がり具合を表す量になっているということを主張するのが Lichnerowicz 公式である.

例 3.13. $M = \mathbb{R}^n$ なら $\mathrm{Scal} = 0$ であり，この場合の Lichnerowicz 公式は例 3.9 で示した.

[*2] ここで，点 $p \in M$ 周りの正規座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ とは

$$\nabla_{X_p}\partial_i = 0 \quad (\forall X_p \in T_pM)$$

を満たすような座標である．各点に対して正規座標は必ず取れる.

参考文献

[BHM+15] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, and S. Moroianu, *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. MR3410545

[Hom16] Y. Homma, スピン幾何学 : スピノール場の数学, 森北出版, 2016.

[Tu19] L. W. Tu, トゥー多様体, 裳華房, 2019.