GL_n^+ の基本群について

今田 夏暉

2023 年 4 月 15 日

1　目的

一般線型群 $\mathrm{GL}_n := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の元のうち，行列式が正のものからなる部分群 GL_n^+ を考える．

$$\mathrm{GL}_n^+ = \{A \in \mathrm{GL}_n \mid \det A > 0\}.$$

この基本群を求めることが今回の目的である．すなわち次の定理を証明する．

定理 1. GL_n^+ の基本群は次の通りである．

$$\pi_1(\mathrm{GL}_n^+) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n \geq 3) \\ \mathbb{Z} & (n = 2) \\ \text{trivial} & (n = 1) \end{cases}$$

2　証明の概要

まず概要を述べる．特殊直交群 $SO(n)$ の基本群は既知とする．結果だけ書けば

$$\pi_1(SO(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n \geq 3) \\ \mathbb{Z} & (n = 2) \\ \text{trivial} & (n = 1) \end{cases}$$

である．$n = 1, 2, 3$ の場合については

$$SO(1) = \{1\}, \quad SO(2) \cong S^1, \quad SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$$

であることを考えればすぐにわかる．そして変位レトラクション $F\colon \mathrm{GL}_n^+ \times [0,1] \to SO(n)$ が存在することを示すことができれば，基本群に関する基本的な性質から

$$\pi_1(\mathrm{GL}_n^+) \cong \pi_1(SO(n))$$

となり，定理が従う．この強変位レトラクト r は Schmidt の直交化法により得られ，そのホモトピーは QR 分解を用いて構成される．

3 証明

証明において中心的な役割を果たす次の事実について述べておく．(証明は Appendix を参照)

QR 分解 (Appendix. 系 3)

$A \in \mathrm{GL}_n^+$ に対して $Q \in SO(n)$ と対角成分が全て正である上三角行列 R が一意的に存在して

$$A = QR$$

となる．

定理 1 の証明. 各 $A \in \mathrm{GL}_n^+$ に対して，QR 分解の Q, R を得られるので

$$r\colon \mathrm{GL}_n^+ \to SO(n), \quad A \mapsto Q$$

という写像を考えられる．ここで A から Q を得る手順は Schmidt の直交化法なので r は連続写像である．また $A \in SO(n)$ に対しては $Q = A, R = I$ という QR 分解が考えられるので $r(A) = A$ となることがわかる．[*1] したがって r はレトラクションである．今

$$F\colon \mathrm{GL}_n^+ \times [0,1] \to \mathrm{GL}_n^+, \quad F(A,t) = Q(tI + (1-t)R)$$

という連続写像を考える．[*2] ここで $tI + (1-t)R$ は対角成分が全て正の上三角行列であるから $\det(tI + (1-t)R) > 0$ であり，したがって任意の $A \in \mathrm{GL}_n^+, t \in [0,1]$ に対して $F(A,t) \in \mathrm{GL}_n^+$ であることに注意する．明らかに

$$\begin{aligned} F(A,0) &= A && (\forall A \in \mathrm{GL}_n^+) \\ F(A,1) &= r(A) && (\forall A \in \mathrm{GL}_n^+) \\ F(A,t) &= A && (\forall A \in SO(n), \forall t \in [0,1]) \end{aligned}$$

であるから，F は変位レトラクションである．よって

$$\pi_1(GLn^+) \cong \pi_1(SO(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n \geq 3) \\ \mathbb{Z} & (n = 2) \\ \text{trivial} & (n = 1) \end{cases}$$

である． ■

[*1] このことは A から Q を得る手順を考えてもすぐにわかる．

[*2] $A \mapsto R = Q^{-1}A$ も連続であるから F は連続である．

4 Appendix. QR 分解

便宜上

$$Up(n)^+ := \{A \in \mathrm{GL}_n \mid A \text{ は上三角行列かつ対角成分が全て正 }\}$$

と書くことにする.

定理 2. 任意の $A \in \mathrm{GL}_n$ に対して $Q \in O(n)$ と $R \in Up(n)^+$ の組で

$$A = QR$$

となるものが一意的に存在する.

証明. $A = [v_1 \ \cdots \ v_n] \in \mathrm{GL}_n$ と列ベクトルで表す. Schmidt の直交化法により $v_1, \cdots, v_n$ から正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ を得る. すなわち

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
e_2 &= \frac{v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1\|} \\
&\vdots \\
e_n &= \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle v_n, e_i\rangle e_i}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle v_n, e_i\rangle e_i\|}
\end{aligned}$$

とする. ここで, Schmidt の方法の過程において, e_i を作った時にもし $\langle v_i, e_i\rangle < 0$ となっていたら, $-e_i$ を改めて e_i としておくことで全ての $i = 1, \cdots, n$ に対して $\langle v_i, e_i\rangle > 0$ とできる.[*3] また $e_1, \cdots, e_n$ の作り方から

$$v_i \in \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_i\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
v_1 &= \langle v_1, e_1\rangle e_1 \\
v_2 &= \langle v_2, e_1\rangle e_1 + \langle v_2, e_2\rangle e_2 \\
&\vdots \\
v_n &= \langle v_n, e_1\rangle e_1 + \langle v_n, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle v_n, e_n\rangle e_n
\end{aligned}$$

となっている. したがって

$$Q = [e_1 \ \cdots \ e_n] \in O(n)$$

[*3] 実際には $A \in \mathrm{GL}_n^+$ なら最初から $\langle v_i, e_i\rangle > 0$ $(i = 1, \cdots n)$ となっているので改める必要はない. これは内積の連続性からわかる.

$$R = \begin{bmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \langle v_2, e_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, e_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle v_n, e_n \rangle \end{bmatrix} \in Up(n)^+$$

とおけば QR 分解が得られる．

次にこの分解の一意性を示す．$Q_1, Q_2 \in O(n), R_1, R_2 \in Up(n)^+$ が存在して

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$

となっていたとする．$Q_i^\top Q_i = I$ $(i = 1, 2)$ より

$$\begin{aligned} R_1^\top R_1 &= R_1^\top (Q_1^\top Q_1) R_1 \\ &= (Q_1 R_1)^\top Q_1 R_1 \\ &= (Q_2 R_2)^\top Q_2 R_2 \\ &= R_2^\top (Q_2^\top Q_2) R_2 \\ &= R_2^\top R_2 \end{aligned}$$

であるから

$$(R_1 R_2^{-1})^\top = R_2 R_1^{-1} \tag{1}$$

となる．ここで式 (1) の左辺は下三角行列であり，右辺は上三角行列であるから，これは対角行列でなければいけない．そこで R_1 の対角成分を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，$R_2$ の対角成分を $\beta_1, \cdots, \beta_n$ とすると式 (1) は

$$\mathrm{diag}(\alpha_1/\beta_1, \cdots, \alpha_n/\beta_n) = \mathrm{diag}(\beta_1/\alpha_1, \cdots, \beta_n/\alpha_n)$$

であるから $i = 1, \cdots, n$ に対して

$$\alpha_i^2 = \beta_i^2$$

がわかる．今，$\alpha_i, \beta_i > 0$ であるから $\alpha_i = \beta_i$ であり

$$(R_1 R_2^{-1})^\top = R_2 R_1^{-1} = I$$

である．したがって $R_1 = R_2$ である．またこれから

$$Q_1 = A R_1^{-1} = A R_2^{-1} = Q_2$$

もわかる． ■

系 3. 任意の $A \in \mathrm{GL}_n^+$ に対して $Q \in SO(n)$ と $R \in Up(n)^+$ の組で

$$A = QR$$

となるものが一意的に存在する．

証明. 定理 2 より $A \in \mathrm{GL}_n^+ \subset \mathrm{GL}_n$ に対して $A = QR$ となる $Q \in O(n)$ と $R \in Up(n)^+$ が一意的に存在する．このとき

$$\det Q = \det AR^{-1} = \frac{\det A}{\det R} > 0$$

であるから $Q \in SO(n)$ である． ■