# 佐藤理論勉強ノート

なつき

2026 年 2 月　9 日 (v1)
2026 年 2 月 28 日 (v2)

# はじめに

学部生の頃に一度，友人たちと「ソリトンの数理」で自主ゼミをしていました．当時我々は可積分系やその周辺に関する知識がほとんどなく，なんとか式を追うことはできるのですが何をやっているのかよくわからないという感じで，結局「第 6 章 変換群と $\tau$ 関数」あたりで頓挫してしまったことを覚えています．しかしその後もソリトンに対する憧れと理解したいという気持ちは消えず，いつか再挑戦したいと思っていました．

そんなところに，2025 年 4 月頃から佐藤理論を勉強する機会を頂きました．約 1 年ほど勉強してひと段落ついたので，全体の流れを整理する意味も込めてノートにまとめることにしました．また今回，後輩や当時の自主ゼミメンバーに向けて佐藤理論について発表する機会を頂いたので，その発表ノートも兼ねています．

以下，このノートの内容について．内容はほとんど [SN84] にあるものですが，実際に勉強のために読んだ本は [NT] です．また，このまとめノートを作成するにあたっては [Oik] もかなり参考にしました．細かいところまで説明しようと思うととても 1 コマ分で終わるようなものではないので，あくまで概要を掴むことを目的としています．そのため証明などはほとんど書いていませんが，できるだけ例などを交えてわかりやすく説明するように心がけました．節タイトルの頭に ♠ を付した節は，発表では省略した部分です．

# 目次

**第 1 章　歴史的背景** 1
1.1　KdV 方程式 . . . . . 1
1.2　KP 方程式 . . . . . 4
1.3　佐藤理論 . . . . . 4

**第 2 章　グラスマン多様体とプリュッカー関係式** 7
2.1　プリュッカー埋め込み . . . . . 7
2.2　プリュッカー関係式 . . . . . 8

**第 3 章　擬微分作用素と KP 階層** 11
3.1　擬微分作用素 . . . . . 11
3.2　KP 階層 . . . . . 12
3.3　♠KdV 階層 . . . . . 15
3.4　佐藤方程式 . . . . . 16

**第 4 章　佐藤グラスマン多様体** 19
4.1　$\mathcal{E}_R$ の作用する空間 $\mathcal{V}$ . . . . . 19
4.2　佐藤グラスマン多様体 . . . . . 20
4.3　マヤ図形とヤング図形 . . . . . 21
4.4　プリュッカー埋め込み . . . . . 23

**第 5 章　$SGM$ と KP 階層** 25
5.1　正則擬微分作用素と $SGM^{\varnothing}$ . . . . . 25
5.2　KP フロー . . . . . 26

**第 6 章　$\tau$ 関数と広田の双線形形式** 27
6.1　$\tau$ 関数 . . . . . 27
6.2　広田の双線形形式 . . . . . 29

**付録 A　KdV 階層と $SGM$** 33
A.1　KdV 階層の条件の書き換え . . . . . 33

A.2 結論 . . . . . 34

**付録 B 佐藤グラスマン多様体の接束** 35

B.1 ♠$SGM$ と $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の接束 . . . . . 35

B.2 ♠擬正則擬微分作用素と $SGM$ . . . . . 37

B.3 ♠$SGM$ と $\mathcal{W}$ の接束 . . . . . 37

**付録 C 勉強の参考になる資料** 39

# 1 歴史的背景

## 1.1 KdV 方程式

1834 年に造船技師の Scott Russell がエジンバラ郊外の運河で孤立波を観察したことがソリトンの始まりである [Rus44]. この時に観察された波は，その後 1895 年に Korteweg と de Vries によって KdV 方程式として定式化された [KdV95]．2 変数 $x, t$ に関する非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$



Scott Russell

を KdV 方程式と呼ぶ．ここで，$u = u(x,t)$ は波の高さを表す．係数は変数変換により調整可能なので本質的ではないが，あとのためにこの形で書いておく．この方程式の解としては例えば 1 ソリトン解と呼ばれる

$$u(x,t) = \frac{c}{\cosh^2\left(\sqrt{c}(x+ct+\delta)\right)}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1.2}$$

が知られている．これは速度 $c$ で $x$ 方向に進む孤立波を表す (図 1.1)．この式からわかる通り，波の速度が大きいほど波の高さも大きくなる．波の数を増やすこともでき，2 ソリトン解のグラフを書くと図 1.2 のようになる．高い波の方が速く進むため，2 つの波が衝突する様子がわかる．通常，非線形の波の場合は波と波が衝突すると複雑な現象が起こり，波は崩壊する．しかし KdV 方程式のソリトン解の場合は，衝突後に再び元の形に戻る．このように 1 つ 1 つの孤立波が粒子のように振る舞うのである．また，線形の波の場合は重ね合わせの原理が成り立つため，波と波が衝突しても互いに影響を与えずに通り過

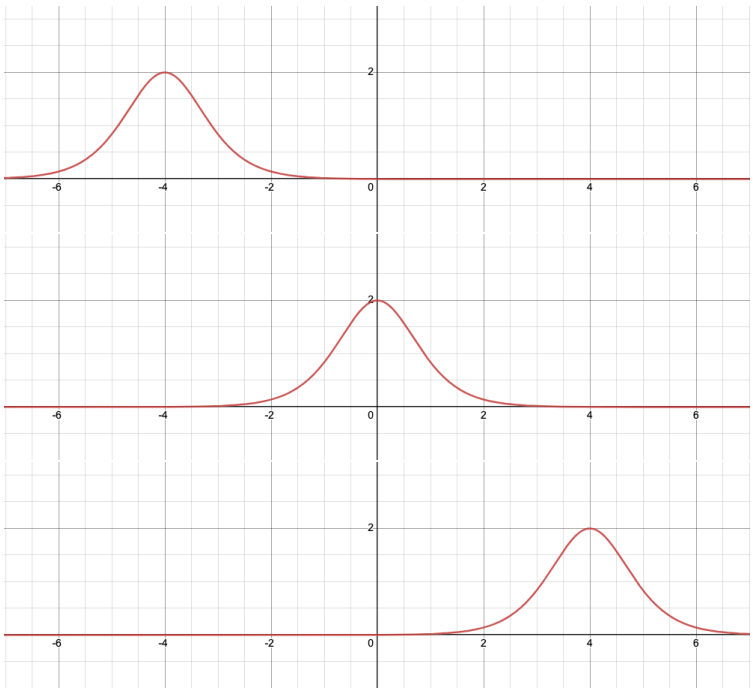



図 1.1: 1 ソリトン解の動き

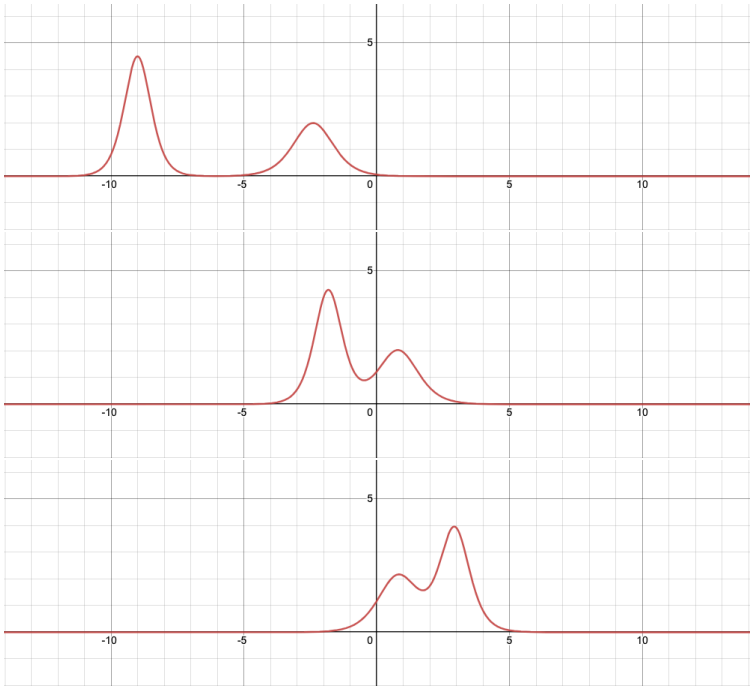
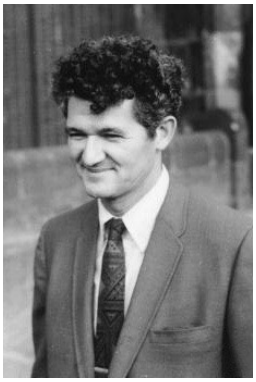



図 1.2: 2 ソリトン解の動き

ぎる．しかし，KdV 方程式のソリトン解の場合は衝突の際に位相のずれが生じる．このあたりからも粒子っぽさが感じられる．一般にソリトン解 (孤立波解) を持つ方程式は非線形性と分散性の両方を兼ね備えており，それぞれは孤立波を破壊する働きをするが，それらが共にバランスを取ることで孤立波が形成される[*1]．

さて，非線形偏微分方程式は一般に解析的に解くことが難しいことで知られている．Korteweg と de Vries は KdV 方程式を導出したが，この時点ではこの方程式の解法は不明であった．KdV 方程式は長い間忘れ去られていたが，1965 年に Zabusky と Kruskal [ZK65] が非線形格子の振る舞いが KdV 方程式に近似できることに気づき，再び KdV 方程式が注目されるようになった[*2]．彼らは数値実験を行い，KdV 方程式の解が粒子のように振る舞う波であることを発見し，これをソリトンと名付けた．そして 2 年後には，Gardner, Greene, Kruskal, Miura [GGKM67] が KdV 方程式を解析的に解く手法である逆散乱法を発見した．



Peter Lax

さらに 1968 年には，Peter Lax [Lax68] が逆散乱法の考え方を等スペクトル変形として捉え直すことで Lax 方程式を導入した．この捉え方が佐藤理論に繋がるのでここで少し説明する．時間に依存する微分作用素 $P(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2u(x,t)$ を考え，その固有値問題

$$P(t)\psi(x,t) = \lambda(t)\psi(x,t)$$

を考える．ここで $\lambda(t)$ は各 $t$ における固有値，$\psi$ は固有関数である．いま $P(t)$ の時間発展がある微分作用素 $A(t)$ を用いて

$$\frac{dP}{dt} = [A,P] = AP - PA \tag{1.3}$$

と表されるとする．このとき，

$$\frac{d}{dt}U(t) = A(t)U(t)$$

を満たす作用素 $U(t)$ によって

$$P(t) = U(t)P(0)U(t)^{-1}$$

とかける．したがって $P(t)$ の固有値 $\lambda(t)$ は時間に依存しない．また固有関数も

$$\psi(x,t) = U(t)\psi(x,0)$$

---

[*1] 分散性などに関する詳細な議論については [Hir92] を参照

[*2] このときに考えていたのはいわゆる FPU 問題と呼ばれる問題である．FPU はそれぞれ，フェルミ，パスタ，ウラムの頭文字である．格子状にバネと粒子を繋ぎ，粒子の振動がどのように伝わるかを考える．ただしこのバネを普通のフックの法則には従わず，復元力が非線形な関数に従うようなものを考えている．普通ならば振動は拡散していき平衡状態になるはずであるが，この場合には一定時間で元の振動に戻る再帰現象が確認された．この再起現象がソリトンの性質によるものだと気づいたのが Zabusky と Kruskal である．

と表される．そして実は

$$A(t) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

と取ると，式 (1.3) は KdV 方程式 (1.1) になるのである．すなわち，KdV 方程式の時間発展は等スペクトル変形として捉えられる．

## 1.2　KP 方程式

1970 年，Kadomtsev と Petviashvili は KdV 方程式のソリトン解に横向きの摂動を加えた場合の安定性の議論のために，KdV 方程式を空間 2 次元へと拡張した KP 方程式を導出した [KP70].

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

KdV 方程式の解は明らかに KP 方程式の解にもなることに注意しておきたい．実は KP 方程式はより普遍的な「KP 階層」の元となる方程式であり，今回の主題である佐藤理論において中心的な役割を果たすことになる．

1971 年，広田良吾によって，逆散乱法を介さずにソリトン方程式を解く手法が開発された [Hir71]．これを広田の直接法という．広田は従属変数変換

$$u(x,y,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau(x,y,t)$$

を導入することで，KdV 方程式や KP 方程式のような複雑な非線形方程式が $\tau$ 関数に対する双線形形式

$$\begin{aligned} &\text{(KdV)} && (D_x^4 - 4D_xD_t)\tau\cdot\tau = 0 \\ &\text{(KP)} && (D_x^4 + 3D_y^2 - 4D_xD_t)\tau\cdot\tau = 0 \end{aligned}$$

という形に書き直せることを発見した．ここで $D$ は広田微分である．広田微分の定義は §6.2 で述べる．双線形形式の解き方については詳しく述べない．重要なのは，このように書き換えることで一般の $N$ ソリトン解が機械的に計算できるようになったことである．ざっくり言えば，$\tau$ 関数を冪級数の形で展開しておいて，双線形形式を満たすように各項の係数を下から順に決定していくのである[*3]．$N$ 次の形で $\tau$ 関数を仮定すれば，$N$ ソリトン解が得られる．広田の方法による具体的な $N$ ソリトン解の構成法については，例えば広田先生ご自身による著書 [Hir92] がわかりやすい．(早稲田理工の学生であれば，丸野先生による大学院生向け講義「ソリトンの数理 A」もおすすめ．)



広田良吾

## 1.3　佐藤理論

[*3] 量子力学の摂動論と同じで $\varepsilon$ で展開して解を求めるのだが，$N$ 次で打ち切った “近似解” が実は厳密解になっており $N$ ソリトン解が得られる．



佐藤幹夫

KdV 方程式や KP 方程式は高い対称性を持っており，それを反映して無限個の時間パラメータを持つ方程式系である KdV 階層，KP 階層を形成する．佐藤幹夫は Lax の影響を受け，Lax 方程式の形でこの階層を定式化した．そして KP 階層が最も基本的な方程式であり，その他の多くのソリトン方程式が KP 階層の制限として得られること，KP 階層の解が無限次元グラスマン多様体上のフローとして捉えられることを発見した．

無限次元グラスマン多様体についてここで少し述べておく．無限個の独立変数 $t_1, t_2, \cdots$ , の関数 $f$ を冪級数展開して

$$f(t_1, t_2, \cdots) = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\cdots\in\mathbb{N} \\ \nu_i=0\,(i\gg 0)}} c_{\nu_1\nu_2\cdots} \frac{t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_2} \cdots}{\nu_1!\nu_2!\cdots}$$

と表わす．関数全体の空間を考えたとき $(c_{\nu_1\nu_2\cdots})$ が座標になっているわけである．この係数の間に

$$(c_{400\cdots} - 4c_{1010\cdots} + 3c_{020\cdots})c_{000\cdots} - 4(c_{300\cdots} - c_{0010\cdots})c_{100\cdots} + 3(c_{200\cdots}^2 - c_{010\cdots}^2) = 0$$

をはじめとする無限個の斉次 2 次方程式 (プリュッカー関係式) が成り立つような部分集合を考える．これが無限次元グラスマン多様体であり，ソリトン型方程式の一般解を与えている．そしてさらに，広田の双線形形式はプリュッカー関係式そのものであることを見出した [Sat81, SS83]．これが，現在佐藤理論と呼ばれているものである．この時の状況について，佐藤幹夫は次のように述べている ([SK14] から引用).

> このようにして私は，1980 年のクリスマス頃に，妻との共同研究により無限次元グラスマン多様体の概念に到達しました．我々は，BASIC のプログラムを用いて多くの計算を実行しました．それらを毎日眺めているうちに，私は結局すべての話の背後に無限次元グラスマン多様体があるということに気づいたのです．今回もまた，いったん無限次元グラスマン多様体やプリュッカー座標の概念に到達してしまった後は急速に進展して，非常に短い間に—1 ヶ月以内に—ほとんどすべて終わってしまいました．

表 1.1: 佐藤理論に至るソリトン研究の歴史

| 年 | 人物 | 出来事 |
|---|---|---|
| 1834 | Scott Russell | 孤立波（ソリトン）を観察 |
| 1895 | Korteweg, de Vries | KdV 方程式を導出 |
| 1965 | Zabusky, Kruskal | KdV 方程式再注目 |
| 1967 | Gardner, Greene, Kruskal, Miura | 逆散乱法の開発 |
| 1968 | Peter Lax | Lax 方程式の導入 |
| 1970 | Kadomtsev, Petviashvili | KP 方程式の導出 |
| 1971 | 広田良吾 | 広田の直接法の開発 |
| 1980 | 佐藤幹夫 | 無限次元グラスマン多様体に到達 |
| ⋮ | 色々な人 | さらなる発展 |

# 2 グラスマン多様体とプリュッカー関係式

## 2.1 プリュッカー埋め込み

ここではまず有限次元の場合を扱う．ベクトル空間の係数体は $\mathbb{C}$ としておくが，$\mathbb{R}$ でも同様である．

**定義 2.1.** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間とする．$1 \leq k < n$ に対して

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{U \subset V \mid U \text{ is } k\text{-dim'l subspace}\}$$

と定める．これが**グラスマン多様体**である．特に $k = 1$ の場合，$\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}_1(V)$ と表し，**射影空間**と呼ばれる．

グラスマン多様体には自然な位相と多様体構造が入る．ここではその詳細には立ち入らないが雰囲気だけ説明する．$U \in \mathrm{Gr}_k(V)$ を固定し，$V = U \oplus W$ なる部分空間 $W$ を取る．すると $U$ の “近く” にある $U' \in \mathrm{Gr}_k(V)$ はある線形写像 $f : U \to W$ を用いて

$$U' = \mathrm{graph}\, f = \{u + f(u) \mid u \in U\}$$

と表される．つまり，$U$ から $f$ の分だけずらしているのである (図 2.1)．したがって，$U$ の近傍は線型写像全体の空間 $\mathrm{Hom}(U, W)$ と同一視でき，これが座標近傍となる．$\mathrm{Hom}(U, W)$ は $k(n-k)$ 次元のベクトル空間であるから，$\mathrm{Gr}_k(V)$ は $k(n-k)$ 次元の多様体である[*1]．

[*1] この多様体構造の入れ方は，可微分多様体としての構造であることに注意．後で説明するプリュッカー関係式を用いることで代数多様体の構造を入れることもできる．

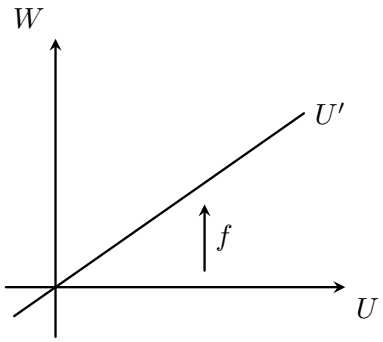



図 2.1: $f\colon U \to W$ のグラフ

さて，ベクトル空間の部分空間は外積を用いて表現できる．$U \in \mathrm{Gr}_k(V)$ を基底 $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$ で張られる部分空間とする．このとき，$\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k-1} \in \bigwedge^k V$ が $U$ に対応する外積の元であると考えるのである．基底の取り方は正則行列の分だけあり得る．例えば別の基底 $\{\xi'_0, \ldots, \xi'_{k-1}\}$ を取ったとき，ある正則行列 $A \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ が存在して

$$\begin{pmatrix} \xi'_0 & \xi'_1 & \cdots & \xi'_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{k-1} \end{pmatrix} A$$

と表される．このとき $\bigwedge^k V$ の元としては

$$\xi'_0 \wedge \xi'_1 \wedge \cdots \wedge \xi'_{k-1} = \det(A) \xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{k-1}$$

となる．つまり，$U$ に対応する外積の元は基底の取り方によって定数倍の不定性があり，対応する $\bigwedge^k V$ の元を集めてくると，1 次元部分空間をなすのである．すなわち，$\mathrm{Gr}_k(V)$ の元を外積に対応させようと考えたとき，$\bigwedge^k V$ の元に対応させるというよりも，$\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ の元に対応させる方が自然である．以上の議論により，単射

$$\Phi\colon \mathrm{Gr}_k(V) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right), \quad \mathrm{span}\{\xi_0, \cdots, \xi_{k-1}\} \mapsto \mathrm{span}\{\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k-1}\}$$

が定まる．これを**プリュッカー埋め込み**という．次元を比較すると $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ の方が次元が大きいので，$\Phi$ の像は $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ の中で特別な部分集合になる．この像を特徴付けるのが**プリュッカー関係式**である．

## 2.2　プリュッカー関係式

$V$ の基底 $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ を固定し，$V = \mathbb{C}^n$ と思うことにする．$k$ 次元部分空間 $U \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ を基底 $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{k-1})$ で張られる部分空間とする．各 $\xi_i$ を基底 $\{e_j\}$ で展開して

$$\xi_j = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{ij} e_i, \quad \xi_{ij} \in \mathbb{C}$$

と表す．一方で $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の基底として $\{e_I = e_{i_0} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k-1}} \mid 0 \leq i_0 < \cdots < i_{k-1} \leq n-1\}$ が取れるので

$$\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k-1} = \sum_I \Delta_I(\xi) e_I, \quad \Delta_I(\xi) \in \mathbb{C}$$

と展開できる．この $(\Delta_I(\xi))_I$ を $U$ の**プリュッカー座標**という．プリュッカー座標は射影空間の斉次座標なので，先にも述べた通り定数倍の不定性があることに注意する．$\Delta_I(\xi)$ は $\xi_{ij}$ を用いて表すことができる．

**補題 2.2.** 基底を並べた行列を $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}) = (\xi_{ij})_{ij}$ とし，$I = (i_0, \ldots, i_{k-1})$ に対して，$\xi_I = (\xi_{i_m i_n})_{0 \leq m,n \leq k-1}$ を $\xi$ の $i_0, \ldots, i_{k-1}$ 番目の行と列からなる $k$ 次正方行列とする．このとき

$$\Delta_I(\xi) = \det(\xi_I)$$

が成り立つ．

プリュッカー座標の記号 $\Delta_I(\xi)$ を，昇順の組 $I = (i_0 < \ldots < i_{k-1})$ から，一般の $n$ 以下の整数の組 $I = (i_0, \cdots, i_{k-1})$ へと反対称に拡張しておく．反対称にするのは，プリュッカー座標が $e_I$ の係数であるから，もしくは補題 2.2 を考えれば自然であると納得できると思う．このとき，プリュッカー座標は次の関係式を満たす．

**定理 2.3** (プリュッカー関係式)**.** 任意の $I = (i_0, \ldots, i_{k-2})$，$J = (j_0, \ldots, j_k)$ に対して

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^{l-1} \Delta_{i_0,\ldots,i_{k-2},j_l}(\xi) \Delta_{j_0,\ldots,\widehat{j_l},\ldots,j_k}(\xi) = 0$$

が成り立つ．逆に，これらの関係式を全て満たす $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ の部分集合は，プリュッカー埋め込みによる $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の像である．

**例 2.4.** $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$ の場合を考える (これが非自明なもののうち最も簡単な例)．このとき，プリュッカー座標は $[\Delta_{01} \colon \Delta_{02} \colon \Delta_{03} \colon \Delta_{12} \colon \Delta_{13} \colon \Delta_{23}]$ である．$I = (0)$，$J = (1, 2, 3)$ と取ると，プリュッカー関係式は

$$\Delta_{01}\Delta_{23} - \Delta_{02}\Delta_{13} + \Delta_{03}\Delta_{12} = 0$$

となる．$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ の場合は独立な関係式はこの 1 つだけである．実際 $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$ は 5 次元多様体であり，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ は 4 次元多様体であるから，1 つの関係式で特徴付けられていることと整合する．

# 3 擬微分作用素と KP 階層

## 3.1 擬微分作用素

ここでは佐藤理論の基礎となる擬微分作用素について述べる．擬微分作用素は微分作用素を拡張して負冪も許したものであり，ソリトン方程式の Lax 形式を記述するのに用いられる．以降，$R = \mathbb{C}[[x]]$ を形式的冪級数環，$K = \mathbb{C}((x))$ を形式的ローラン級数環とする．

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C} \right\}$$
$$\mathbb{C}((x)) = \left\{ \sum_{k=N}^{\infty} a_k x^k \;\middle|\; N \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

$R, K$ は形式的な微分 $\partial$ を備えている．これは $\partial(x^n) = nx^{n-1}$ を $\mathbb{C}$-線形に拡張したものである．

以降，$A = R, K$ のいずれかとし，$\partial\colon A \to A$ を上で定めた形式的な微分とする．$A$ 上の**微分作用素**とは

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k \partial^k, \quad a_k \in A, N \in \mathbb{N}$$

と表されるものである．微分作用素全体は環をなし，これを $\mathcal{D}_A$ と書くことにする．つまり $\mathcal{D}_A$ は $\partial$ を不定元とする多項式環 $A[\partial]$ であるが，これは非可換環であることに注意が必要である．実際，ライプニッツ則により

$$\partial^n \circ f = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} f^{(j)} \partial^{n-j} \tag{3.1}$$

となる．ここで $f^{(j)} = \partial^j(f)$ である．

**注意 3.1.** $\partial^n \circ f$ は，$f \in \mathcal{D}_A$ とみて作用素の合成として表記している．一方で，$f^{(j)}$ は $f \in A$ とみて微分を $j$ 回作用させたものである．$\mathcal{D}_A$ は $A$ への自然な作用がある一方で，$A \subset \mathcal{D}_A$ でもあるから，両方の意味で $f$ を使っていることに注意.

微分作用素に負冪を許すことで擬微分作用素を定義する．

**定義 3.2.** $A$ 上の**擬微分作用素**とは

$$P = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k \partial^k, \quad a_k \in A, N \in \mathbb{Z}$$

と表されるものである．擬微分作用素全体は環をなし，これを $\mathcal{E}_A$ と書くことにする．

別の言い方をすれば $\mathcal{E}_A$ は $\partial$ を不定元とする形式的ローラン級数環 $A((\partial^{-1}))$ であるが，もちろんこれも非可換環である．擬微分作用素の積もライプニッツ則 (3.1) を用いて定義される．ここで二項係数は

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$$

と定義しておくことで，$n$ が負の整数の場合でも意味を持つ．例えば，$\partial^{-1} \circ f$ は

$$\partial^{-1} \circ f = \sum_{j \geq 0} (-1)^j f^{(j)} \partial^{-1-j} = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} - \cdots$$

と表される．

$\mathcal{E}_A$ は定義から $\mathcal{D}_A$ を含んでいる．$P = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k \partial^k \in \mathcal{E}_A$ に対して，

$$P_+ = \sum_{k=0}^{N} a_k \partial^k, \quad P_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \partial^k$$

と表すことにする．$P = P_+ + P_-$ であり，$P \in \mathcal{D}_A \Leftrightarrow P_- = 0$ である．

微分作用素から擬微分作用素に拡張することで，微分作用素の逆元や冪根を定義できるようになった．例えば擬微分作用素 $P = a_N \partial^N + \cdots$ の最高次の係数 $a_N \in A$ が可逆であれば，$P$ は擬微分作用素として逆元 $P^{-1}$ を持つ.

## 3.2 KP 階層

KP 階層は擬微分作用素に関する時間発展の方程式系である．そこで擬微分作用素の係数に時間パラメータを導入しておく必要がある．$t$ を 1 つの時間変数とし，$A$ の係数を $t$ の関数に置き変えた環 $A_t := \mathbb{C}[[t]][[x]], \mathbb{C}[[t]]((x))$ を考える．$\partial$ は $x$ についての微分とする．時間変化する擬微分作用素 $L(t) \in \mathcal{E}_{A_t}$ として

$$L(t) = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots, \quad u_i = u_i(t,x) \in A_t \tag{3.2}$$

の形のものを考え，これの変形について考えたい．$L(t)$ の時間発展として，何か微分作用素 $B(t) \in \mathcal{D}_{A_t}$ を用いて Lax 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L] \tag{3.3}$$

の形で表されるものを考えよう．$\partial L/\partial t$ は $L$ の各係数関数 $u_i$ の $t$ についての偏微分を意味し，$[B, L] = BL - LB$ は擬微分作用素の積による交換子である．$L$ はそれ自体は 1 階の擬微分作用素であるが，1 次係数は 1 であり，0 次の項は存在しないという特別な形をしているため $\partial L/\partial t$ は自動的に $-1$ 階の擬微分作用素になる．従って，式 (3.3) が意味のある時間発展になるためには，右辺 $[B, L]$ も $-1$ 階の擬微分作用素になるように $B$ を選ばなければならない．このような $B$ は非常に限られており，実は $(L^m)_+$ $(m \in \mathbb{N})$ の線型結合しか存在しないことがわかる．そこで無限個の独立な時間パラメータを導入する．

**定義 3.3.** 無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \ldots)$ を考え，$C = \mathbb{C}[[t]] = \mathbb{C}[[t_1, t_2, \ldots]]$ とする．$R, K$ の係数にこの時間パラメータを導入した環を

$$R_t = C[[x]] = \mathbb{C}[[t]][[x]], \quad K_t = C((x)) = \mathbb{C}[[t]]((x))$$

と表すことにする．また，これ以降 $A_t$ は無限個の時間パラメータを持つ $R_t$ か $K_t$ のいずれかを表すものとする．

**注意 3.4.** 無限個の変数を持つ冪級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ は射影極限などにより厳密に定義できるが，ここでは詳細には立ち入らない．

**定義 3.5.** $L(t) \in \mathcal{E}_{A_t}$ を式 (3.2) の擬微分作用素として，それぞれの時間変数 $t_m$ に対して

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [B_m, L], \quad B_m = (L^m)_+ \tag{3.4}$$

という発展方程式を考える．(3.6) は係数関数で書き下せば $u_2, u_3, \ldots$ に関する可算無限個の非線形偏微分方程式系であり，この方程式系を **KP 階層**という．(3.6) は KP 階層の Lax 形式による表示である．

**例 3.6.** $m = 1, 2, 3$ について具体的に計算してみる．

(1) $m = 1$ について．$B_1 = (L^1)_+ = \partial$ であるから

$$[B_1, L] = [\partial, L] = u_2'\partial^{-1} + u_3'\partial^{-2} + \cdots$$

となる．ここで $u_i'$ は $u_i$ の $x$ についての微分である．したがって，式 (3.4) は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad i = 2, 3, \cdots$$

となる．すなわち，$t_1$ は空間変数 $x$ と同じ役割を果たしている．別の言い方をすれば，$u_i$ の中で $x$ と $t_1$ は $t_1 + x$ の形でしか現れない．

(2) $m=2$ について．$B_2=(L^2)_+=\partial^2+2u_2$ であるから

$$[B_2,L]=(u_2''+2u_3')\partial^{-1}+(2u_2u_2'+u_3''+2u_4')\partial^{-2}+\cdots$$

となる．したがって，式 (3.4) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t_2}&=u_2''+2u_3'\\ \frac{\partial u_3}{\partial t_2}&=2u_2u_2'+u_3''+2u_4'\\ &\vdots\end{aligned}$$

となる．

(3) $m=3$ について．$B_3=(L^3)_+=\partial^3+3u_2\partial+3(u_2'+u_3)$ であるから

$$[B_3,L]=(u_2'''+3u_3''+3u_4'+6u_2u_2')\partial^{-1}+(u_3'''+3u_4''+3u_5'+6u_2u_3'+6u_2'u_3)\partial^{-2}+\cdots$$

となる．したがって，式 (3.4) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t_3}&=u_2'''+3u_3''+3u_4'+6u_2u_2'\\ \frac{\partial u_3}{\partial t_3}&=u_3'''+3u_4''+3u_5'+6u_2u_3'+6u_2'u_3\\ &\vdots\end{aligned}$$

となる．

KP 階層がなぜ KP 階層と呼ばれているのかを説明する．例 3.6 の結果から，$u_2,u_3,\ldots$ が KP 階層の解であるならば

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2}=u_2''+2u_3' \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_3}=u_2'''+3u_3''+3u_4'+6u_2u_2' \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t_2}=2u_2u_2'+u_3''+2u_4' \tag{3.7}$$

である．ここで (3.6),(3.7) を用いて $u_4$ を消去すると

$$3\frac{\partial u_3}{\partial t_2}-2\frac{\partial u_2}{\partial t_3}=-6u_2u_2'-3u_3''-2u_2''' \tag{3.8}$$

が得られる．さらに (3.8) を $x$ で微分して (3.5) を代入することで $u_3$ も消去できて

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2u_2}{\partial t_2^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t_3}-\frac{1}{4}\frac{\partial^3u_2}{\partial x^3}-3u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=0 \tag{3.9}$$

を得る．$y=t_2,t=t_3$ と考えれば，これは $u_2$ に関する KP 方程式 (1.4) である．すなわち KP 階層は KP 方程式から始まる方程式系なのである．

## 3.3 ♠KdV 階層

KP 方程式から KP 階層が導かれるように，KdV 方程式からも KdV 階層が導かれる．§1.1 で述べたように $P = \partial^2 + 2u$ に関する Lax 方程式

$$\frac{dP}{dt} = [A, P], \quad A = \partial^3 + 3u\partial + \frac{3}{2}u'$$

から KdV 方程式が導かれるのであった．ここで登場した微分作用素 $A$ は $P$ と深い関係がある．擬微分作用素の中では平方根が定義できると述べたが，実際 $P$ に対して $\partial + f_2\partial^{-1} + f_3\partial^{-2} + \cdots$ の形で平方根を求めようとすると

$$P^{1/2} = \partial + u\partial^{-1} - \frac{1}{2}u'\partial^{-2} + \left(\frac{1}{4}u'' - \frac{1}{2}u^2\right)\partial^{-3} + \cdots$$

と求まる．そして $A = (P^{3/2})_+$ であることがわかる．このことから，KdV 方程式の Lax 形式は

$$\frac{dP}{dt} = [(P^{3/2})_+, P]$$

と書き換えられる．そこで一般の正の奇数 $m = 1, 3, 5, \ldots$ に対して

$$\frac{dP}{dt} = [(P^{m/2})_+, P]$$

という Lax 形式の方程式を考えると，これが高次 KdV 方程式を与える[*1]．そこで正の奇数に対応する無限個の時間変数 $t = (t_1, t_3, t_5, \ldots)$ を導入し，$P(t) \in \mathcal{E}_{A_t}$ を

$$P(t) = \partial^2 + 2u(t, x)$$

の形の擬微分作用素として，それぞれの $t_m$ に対して

$$\frac{\partial P}{\partial t_m} = [(P^{m/2})_+, P] \quad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{3.10}$$

という発展方程式を考える．これを $u$ について書き下せば可算無限個の非線形偏微分方程式系となり，**KdV 階層**と呼ばれる．式 (3.10) は KdV 階層の Lax 表示である．

**例 3.7.** KdV 階層のいくつかを具体的に列挙すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \\
&\frac{\partial u}{\partial t_3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(KdV 方程式)} \\
&\frac{\partial u}{\partial t_5} = \frac{1}{16}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{5}{4}u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{5}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{15}{2}u^2\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

となる．

[*1] ここでは高次 KdV 方程式については詳しく説明しない．高次 KdV 方程式は KdV 方程式の対称性を表す方程式であり，元の KdV 方程式と両立する．

KdV 方程式と KP 方程式の関係は KdV 階層と KP 階層の間の関係に一般化されている．KP 階層の解 $L(t) \in \mathcal{E}_{A_t}$ がさらに $(L(t)^2)_- = 0$ $(\Leftrightarrow L(t)^2 \in \mathcal{D}_{A_t})$ を満たしているとすると，例 3.6 の計算からわかる通り $L^2 = \partial^2 + 2u_2$ となる．そして

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^2}{\partial t_m} &= L\frac{\partial L}{\partial t_m} + \frac{\partial L}{\partial t_m}L \qquad\qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)\\ &= L[(L^m)_+, L] + [(L^m)_+, L]L\\ &= [(L^m)_+, L^2]\end{aligned}$$

を満たすから，$u_2$ は KdV 階層の解になる．またこのとき，偶数番目の時間変数 $t_2, t_4, \ldots$ に関しては

$$\frac{\partial L}{\partial t_{2k}} = [(L^{2k})_+, L] = [L^k, L] = 0$$

が成り立つから，$L$ および $u_2$ は偶数番目の時間変数には依存しないことにも注意．以上のように KP 階層に対して，2 乗が微分作用素になるという条件を課すと KdV 階層が得られる．この状況を，「KP 階層の 2-reduction が KdV 階層である」という．

一般に KP 階層に対して $l$ 乗が微分作用素になるという条件を課すと，その解は $l$ の倍数番目の時間変数に依存しない．このような状況を **$l$-reduction** と呼ぶ．3-reduction で得られる方程式系には Boussinesq 方程式が含まれる．

## 3.4　佐藤方程式

以降では簡単のために KP 階層の解 $L(t)$ を $R_t$ 係数の中で考えることにしよう．初めに KP 階層を佐藤方程式と呼ばれる方程式に書き換える．そのために次の概念を導入する．

**定義** **3.8.** $W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$ の形の擬微分作用素 $W \in \mathcal{E}_R$ を**正則擬微分作用素**という．正則擬微分作用素全体の集合を $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ と書くことにする．$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は擬微分作用素の積に関して群をなす．

$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は擬微分作用素の積によって $\mathcal{E}_R$ に共役で作用する．$L$ はこの共役作用によって最も簡単な 1 階の微分作用素 $\partial$ にできる．

> **命題 3.9.** $L \in \mathcal{E}_R$ を
>
> $$L = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots$$
>
> という形の擬微分作用素とする．このとき正則擬微分作用素 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ であって
>
> $$L = W\partial W^{-1}$$
>
> となるものが存在する．

**注意 3.10.** この命題は，より一般に微分 $\partial$ が全射 (常に不定積分可能) であるような微分代数において成り立つ．$R = \mathbb{C}[[x]]$ の微分 $\partial$ は全射である．しかし $K = \mathbb{C}((x))$ の場合は，$1/x$ の原始関数が存在しないため全射ではない．$K$ に $\log x$ を追加して $\tilde{K} = K[\log x]$ を考えれば，微分は全射になる．

**注意 3.11.** $L$ に対して $W$ は一意的ではなく，$C \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \cap \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ による $W \mapsto WC$ という変換の自由度がある．実際，$(WC)L(WC)^{-1} = WC\partial C^{-1}W^{-1} = W\partial W^{-1}$ である．またこのとき，$L$ と $W$ の係数の間には $u_2 = -\frac{\partial w_1}{\partial x}$ などの関係がある．

§3.2 において KP 階層を $L$ の時間発展として定義したが，これを，対応する $W$ の時間発展として書き換えることができる．$W$ の係数に $t = (t_1, t_2, \ldots)$ を導入して，時間変化する $W(t) \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ を考える．すると KP 階層は

$$\frac{\partial W}{\partial t_m} = B_m W - W\partial^m, \quad B_m = (W\partial^m W^{-1})_+ \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

に書き換えられる．

**命題 3.12.** $L$ が KP 階層の解であるとする．このとき $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ 上の曲線 $W(t)$ であって

$$\begin{aligned} L &= W\partial W^{-1} \\ \frac{\partial W}{\partial t_m} &= B_m W - W\partial^m, \qquad B_m = (W\partial^m W^{-1})_+ \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．逆に，この形の $W \in \mathcal{E}_R$ が $m = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\frac{\partial W}{\partial t_m} = B_m W - W\partial^m, \quad B_m = (W\partial^m W^{-1})_+ \tag{3.11}$$

を満たすならば，対応する $L = W\partial W^{-1}$ は KP 階層の解である．

方程式系 (3.11) はしばしば**佐藤方程式**と呼ばれる．$B_m^c = -(W\partial^m W^{-1})_-$ とおくと

$$\begin{aligned} B_m W - W\partial^m &= (W\partial^m W^{-1} - (W\partial^m W^{-1})_-)W - W\partial^m \\ &= -(W\partial^m W^{-1})_- W \\ &= B_m^c W \end{aligned}$$

であるから佐藤方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t_m} = B_m^c W, \quad B_m^c = -(W\partial^m W^{-1})_- \tag{3.12}$$

と書くこともできる．

# 4 佐藤グラスマン多様体

## 4.1 $\mathcal{E}_R$ の作用する空間 $\mathcal{V}$

今まで通り $R = \mathbb{C}[[x]]$ として $\partial$ を $x$ についての微分とする．擬微分作用素のなす環 $\mathcal{E}_R$ は $\partial$ を不定元とする形式的ローラン級数環 $R((\partial^{-1}))$ として定義された．$\partial^{-1}$ などはもはや微分作用素ではないため $\mathcal{E}_R$ は $R$ への自然な作用は持たない．そこで $\mathcal{E}_R$ の作用する空間として $\mathcal{V} = \mathcal{E}_R/\mathcal{E}_R x$ を考える．$\mathcal{E}_R$ 自身には $\mathcal{E}_R$ の演算から誘導される自然な作用があり，従って剰余環 $\mathcal{V}$ にも自然な作用が入る．例えば $\mathcal{V}$ の元 $e_\nu := \partial^{-1-\nu} \bmod \mathcal{E}_R x$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ を考えると

$$\partial e_\nu = e_{\nu-1}, \quad \partial^{-1} e_\nu = e_{\nu+1}, \quad x e_\nu = (\nu+1) e_{\nu+1}$$

となる．実はこの $\{e_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{V}$ の $C$ 上の基底になっている．すなわち，任意の $v \in \mathcal{V}$ は一意的に $v = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu e_\nu$ $(a_\nu \in C)$ と表される．そこで，$e_\nu$ の添え字に関するフィルトレーション $\{\mathcal{V}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\mathcal{V}^{(n)} = \left\{ \sum_{\nu\geq n} a_\nu e_\nu \;\middle|\; a_\nu \in C \right\}, \quad \cdots \subset \mathcal{V}^{(n+1)} \subset \mathcal{V}^{(n)} \subset \mathcal{V}^{(n-1)} \subset \cdots$$

を導入する．$\mathcal{V}^{(0)}$ はちょうど $\{e_\nu\}_{\nu\geq 0}$ の線型結合で表される空間である．そこで $\{e_\nu\}_{\nu<0}$ の線型結合で表される空間を $V^{\varnothing}$ と書くことで $\mathcal{V}$ は $\nu$ の添え字に関する正負の部分に分けることができる：

$$\mathcal{V} = V^{\varnothing} \oplus \mathcal{V}^{(0)},$$

$$V^{\varnothing} = \bigoplus_{\nu<0} C e_\nu, \quad \mathcal{V}^{(0)} = C[[x]] e_0 = \left\{ \sum_{\nu\geq 0} a_\nu e_\nu \right\}.$$

**注意 4.1.** $\mathcal{E}_R$ の元は $\partial$ の冪に関して上に有限である．したがって，$\mathcal{V}$ の元 $v$ を $v = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu e_\nu$ と表したとき，ある整数 $N$ が存在して $\nu < N$ において $a_\nu = 0$ である．つまり，$\mathcal{V}$ の元は $\{e_\nu\}$ の線型結合としては下に有限である．これが $V^\varnothing$ の方は直和で書いている理由である．

## 4.2　佐藤グラスマン多様体

§4.1 の議論から，$\mathcal{V}$ は $\{e_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ を基底に持つ無限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．有限次元の場合，あるベクトル空間の部分空間であって固定した次元をもつものの全体としてグラスマン多様体を定義した．佐藤グラスマン多様体は，$\mathcal{V}$ の部分空間であって “$V^\varnothing$ と同程度の大きさを持つ” もの全体として定義される．しかし $V^\varnothing$ は無限次元であるから，部分空間の大きさを測る別の方法が必要になる．

**定義 4.2.** $U, V$ を $\mathbb{C}$-ベクトル空間とし，$f\colon U \to V$ を線型写像とする．さらに $\ker(f)$ と $\operatorname{coker}(f) = V/\operatorname{Im}(f)$ がともに有限次元であるとする．このとき，$f$ の**指数**を

$$\operatorname{ind}(f) = \dim\ker(f) - \dim\operatorname{coker}(f)$$

と定義する．

$U, V$ が有限次元ベクトル空間であれば, 次元定理から $\dim U = \dim\ker(f) + \dim\operatorname{Im}(f)$ なので

$$\operatorname{ind}(f) = \dim\ker(f) - (\dim V - \dim\operatorname{Im}(f)) = \dim U - \dim V$$

である．すなわち指数は定義域と終域の大きさの差を測る量である．そこで指数を用いて，$V^\varnothing$ と同じ大きさの部分空間を集めてくることができる．

**定義 4.3.** $\mathcal{V}$ の部分空間 $U \subset \mathcal{V}$ に対して，線形写像 $\alpha_U\colon U \hookrightarrow \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}^{(0)} \cong V^\varnothing$ を考える．$\alpha_U$ の指数が 0 であるような部分空間全体の集合を

$$SGM = \{U \subset \mathcal{V} \mid \operatorname{ind}(\alpha_U) = 0\}$$

と定義し，**佐藤グラスマン多様体**と呼ぶ．また，$SGM$ の部分集合

$$SGM^\varnothing = \{U \subset \mathcal{V} \mid \alpha_U \text{ is isomorphism}\}$$

を $SGM$ の**大胞体**と呼ぶ.

**注意 4.4.** 元々佐藤幹夫はこの無限次元グラスマン多様体を普遍グラスマン多様体と呼び，UGM と表記していた (例えば [SN84]).

## 4.3 マヤ図形とヤング図形

$SGM$ に属する部分空間 $U$ についてもう少し詳しく調べる．$\mathcal{V}$ のフィルトレーション $\{\mathcal{V}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ から $U \in SGM$ にも $\{U^{(n)} = U \cap \mathcal{V}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ によってフィルトレーションが誘導される．フィルトレーション $\cdots \subset U^{(n+1)} \subset U^{(n)} \subset U^{(n-1)} \subset \cdots$ の増大具合を測るために

$$\mathrm{gr}_n(U) = U^{(n)}/U^{(n+1)}$$

を考える．$\dim \mathrm{gr}_n(U)$ が増大具合を表しているのである．例えば $U = V^{\varnothing}$ の場合は

$$\dim \mathrm{gr}_n(V^{\varnothing}) = \begin{cases} 1 & (n < 0) \\ 0 & (n \geq 0) \end{cases}$$

である．一般に，任意の $U \in SGM$ に対して $\dim \mathrm{gr}_n(U) = 0$ or $1$ になる．そこで

$$M(U) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \dim \mathrm{gr}_n(U) = 1\} \subset \mathbb{Z}$$

と定める．$M(U)$ は $U^{(n)} \hookrightarrow U^{(n+1)}$ が真に大きくなるような $n$ の集合である．$U = V^{\varnothing}$ の場合は $M(V^{\varnothing}) = \{\ldots, -3, -2, -1\} = \mathbb{N}^c$ である．

**命題 4.5.** $U \in SGM$ とする．このとき $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して次の条件を満たす．

(1) $\mathbb{Z}_{<-m} \subset M(U) \subset \mathbb{Z}_{<n}$
(2) $\#(M \cap \mathbb{Z}_{\geq -m}) = m$

この命題の意味を説明するために，$M(U)$ を図 4.1 のように表すことにする．この図形は $\mathbb{Z}$ に対応した箱を一列に並べ，$M(U)$ に属する整数に対応した箱には黒丸を書き込むというルールで描かれている．

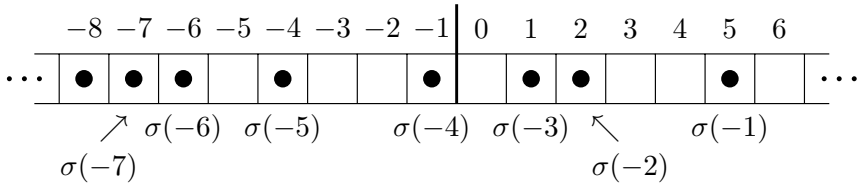



図 4.1: $M(U) = \{\ldots, -8, -7, -6, -4, -1, 1, 2, 5\}$ のマヤ図形

命題 4.5 の条件は，この図形に対して次のように解釈できる．

(1) あるところより左側の箱はすべて黒丸があり，あるところより右側の箱はすべて空き箱である．
(2) $\mathbb{N}^c$ の空き箱の数と $\mathbb{N}$ の黒丸の数は等しい．言い換えれば，有限個の黒丸を左にずらせば $\mathbb{N}^c$ にできる．

このような図形を**マヤ図形**と呼び，マヤ図形全体の集合を $\mathcal{M}$ と書くことにする．またマヤ図形に対して，$\sigma\colon \mathbb{N}^c \to M(U)$ を図 4.1 にあるように単調増加な全単射として定める．すなわち $M(U)$ に含まれる整数のうち大きい方から順番に $\mathbb{N}^c$ の要素に対応させる．この $\sigma$ は $\sigma(\mu) = \mu$ $(\mu << 0)$ を満たす．逆にこの条件を満たす単調増加関数 $\sigma\colon \mathbb{N}^c \to \mathbb{Z}$ はマヤ図形に対応する．

さて，このようにして得られるマヤ図形はヤング図形と一対一に対応する．ヤング図形は整数の列 $Y = (Y_{m-1}, Y_{m-2}, \ldots, Y_0)$ であって $Y_{m-1} \geq Y_{m-2} \geq \cdots \geq Y_0 \geq 0$ を満たすものとして定義される[*1]．ヤング図形全体の集合を $\mathcal{Y}$ と書くことにする．この列 $Y$ を図形として表示するには，上から $i$ 行目に $Y_i$ 個の箱を並べる．マヤ図形 $M(U)$ に対して，対応するヤング図形 $Y(U)$ を次のように定める．

$$Y_i = \sigma(i-m) - i + m \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ここで $m$ は命題 4.5 の整数 $m$ であり，$\sigma$ はマヤ図形に対応する単調増加関数である．

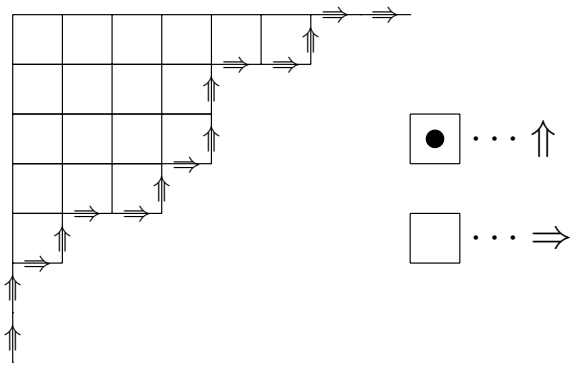



図 4.2:　$M(U) = \{\ldots, -8, -7, -6, -4, -1, 1, 2, 5\}$ に対応するヤング図形 $Y(U) = (6, 4, 4, 3, 1)$

ただし，箱が一個もないものもヤング図形とみなすことにする．この場合 $Y = \varnothing$ と表すことにし，対応するマヤ図形は $M = \mathbb{N}^c$ である．

**注意 4.6.** マヤ図形 (or ヤング図形) と $SGM$ の元は一対一に対応するわけではないことに注意．実際，マヤ図形 $M$ もしくはヤング図形 $Y$ に対応する $SGM$ の元の集まりを

$$SGM^Y = SGM^M = \{U \in SGM \mid M(U) = M\}$$

と書くことにすると，

$$SGM = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} SGM^M = \bigsqcup_{Y \in \mathcal{Y}} SGM^Y$$

は $SGM$ の胞体分割を与える．このうち特に $M = \mathbb{N}^c$ $(Y = \varnothing)$ に対応する胞体が $SGM^{\varnothing}$ であり，$SGM$ の中で (Zariski) 稠密な開部分集合を与える．

[*1] 最後の $Y_0$ に 0 を許しているのは，今後の都合のためであり本質的ではない．末尾に 0 が続く場合は，その部分を除いて考えても同じことである．

## 4.4 プリュッカー埋め込み

有限次元のときと同様に，佐藤グラスマン多様体 $SGM$ も無限次元射影空間への埋め込みを持つ．

**定義 4.7.** フォック空間 $\mathcal{F}$ は，形式的な無限個の外積の線型結合

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{M}} a_\sigma e_{\sigma(-1)}\wedge e_{\sigma(-2)}\wedge\cdots$$

の全体からなる集合である．ここで $\sigma$ はマヤ図形に対応する単調増加関数であり，$a_\sigma\in\mathbb{C}$ である．定義から $\mathcal{F}$ の基底は $\mathcal{M}$ で添字付けられている．

$U\in SGM$ は $V^{\varnothing}$ と同程度の大きさを持つ部分空間であった．$V^{\varnothing}$ の自然な基底として $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}=(e_{-1},e_{-2},\dots)$ が取れる．したがって，$U$ の基底として $\xi=(\xi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}$ と $\mathbb{N}^c$ で添え字付けられたものが取れることが期待できる．実際にこれは正しいが詳細な議論は省略する．そこで，有限次元の場合と同様にプリュッカー埋め込み

$$SGM\ni U\mapsto[\xi_{-1}\wedge\xi_{-2}\wedge\cdots]\in\mathbb{P}(\mathcal{F})$$

が定まる．ここで

$$\xi_{-1}\wedge\xi_{-2}\wedge\cdots=\sum_{\sigma\in\mathcal{M}}\Delta_\sigma(\xi)e_{\sigma(-1)}\wedge e_{\sigma(-2)}\wedge\cdots$$

と表せば[*2]，この係数たち $(\Delta_\sigma(\xi))_{\sigma\in\mathcal{M}}$ がプリュッカー座標である．マヤ図形と (マヤ図形に対応する) 単調増加関数とヤング図形はそれぞれ一対一に対応するので，この $\Delta_\sigma(\xi)$ を，対応するマヤ図形 $M$ やヤング図形 $Y$ を添え字にして $\Delta_M(\xi)$ や $\Delta_Y(\xi)$ と書くこともある．

無限次元の場合も，プリュッカー埋め込みの像はプリュッカー関係式で特徴付けられる．基底 $\xi=(\xi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}$ を適切に正規化することで，プリュッカー座標は

$$\Delta_M(\xi)=\det\left(\begin{array}{cccc|cc}
\ddots & & & & & \\
\cdots & 1 & & & & \\
\cdots & * & 1 & & & \\
\cdots & * & * & 1 & & \\
\hline
\cdots & * & * & * & * & * \\
\cdots & * & * & * & * & *
\end{array}\right)$$

[*2] ここで 2 つの誤魔化しをしている．1 つ目は，本当は $\xi=(\xi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}$ の取り方を少し調整する必要があること．2 つ目は右辺でもって左辺を定義していると解釈すべきということである．そうした場合には別で $\xi_\sigma$ を定義する必要があるが，これは有限次元の時と同じように行列式で定義する．ただしこの行列式は $\infty\times\infty$ サイズの行列の行列式なのでそこでもまた問題が発生する．1 つ目で注意したように基底 $\xi$ の取り方をあらかじめ調整しておくとこの行列式は有限サイズの行列式に帰着でき，問題を全て解決できる．

という形の行列式で計算できる．これは無限サイズの行列式だが，右上の方の成分は全て 0 であり，左上のブロックの対角成分は全て 1 であるため，この行列式の計算は右下の $m \times m$ の行列式に帰着される．この $m$ は命題 4.5 の $m \in \mathbb{N}$ である．そこで

$$\Delta_{l_0,\ldots,l_{m-1}}(\xi) := \Delta_M(\xi), \quad l_i = \sigma(i-m) + m \quad (i = 0, \ldots, m-1)$$

と添え字を置き直すことにより，プリュッカー座標は有限次元の場合のプリュッカー関係式 (定理 2.3) を満たす．$SGM$ のプリュッカー関係式は，全ての有限次元グラスマン多様体のプリュッカー関係式全体である．添え字をヤング図形 $Y = (Y_{m-1}, \ldots, Y_0)$ で書いている場合は $l_i = Y_i + i$ とすれば良い．

**例 4.8.** 例 2.4 のプリュッカー関係式

$$\Delta_{01}\Delta_{23} - \Delta_{02}\Delta_{13} + \Delta_{03}\Delta_{12} = 0$$

をヤング図形を用いて書き直すと

$$\Delta_{\varnothing}\Delta_{\ydiagram{2,2}} - \Delta_{\ydiagram{1}}\Delta_{\ydiagram{2,1}} + \Delta_{\ydiagram{2}}\Delta_{\ydiagram{1,1}} = 0$$

となる．

# 5 $SGM$ と KP 階層

## 5.1 正則擬微分作用素と $SGM^{\varnothing}$

正則擬微分作用素全体 $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ と佐藤グラスマン多様体の大胞体 $SGM^{\varnothing}$ の間には自然な対応が存在する.

**定理 5.1.** 任意の $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ に対して，部分空間

$$W^{-1}V^{\varnothing} = \{\xi \in \mathcal{V} \mid W\xi \in V^{\varnothing}\} \subset \mathcal{V}$$

は $SGM^{\varnothing}$ に属する．そこで

$$\gamma\colon \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to SGM^{\varnothing}, \quad \gamma(W) = W^{-1}V^{\varnothing}$$

と定めると，これは全単射である.

KP 階層の解 $L(t)$ を $\mathcal{E}_{R_t}$ の中で探すことを考えると，各時刻 $t$ において $L(t)$ は正則擬微分作用素 $W(t) \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ を用いて $L(t) = W(t)\partial W(t)^{-1}$ と表され，$W(t)$ は佐藤方程式を満たす $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ 上の曲線に対応するのであった (式 3.12)．一方，定理 5.1 により，$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は $SGM^{\varnothing}$ に対応するから，KP 階層の解は $SGM^{\varnothing}$ 上の曲線として捉えられるというわけである.

| KP 階層の解 ($R$ 係数) | | $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ 上の曲線 | | $SGM^{\varnothing}$ 上の曲線 |
|---|---|---|---|---|
| $L(t)$ | $\leftrightarrow$ | $W(t)$ | $\leftrightarrow$ | $\gamma(W(t))$ |

そこで $L(t)$ の満たす方程式 (KP 階層) を $SGM^{\varnothing}$ 上の方程式として書き直したい.

## 5.2　KP フロー

KP 階層の解 $L(t) \in \mathcal{E}_{R_t}$ を与えるには，佐藤方程式 (3.11)

$$\frac{\partial W}{\partial t_m} = B_m W - W\partial^m, \quad B_m = (W\partial^m W^{-1})_+$$

を満たす正則擬微分作用素 $W(t)$ を与えれば良いのであった．$\gamma\colon \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to SGM^{\varnothing}$ の対応によって佐藤方程式は $SGM^{\varnothing}$ 上の曲線に関する方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t_m} = \partial^m U$$

に書き換えられる[*1]．従って，任意の初期値 $U(0) \in SGM^{\varnothing}$ に対して $SGM^{\varnothing}$ 上の曲線

$$U(t) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m \partial^m} U(0)$$

が KP 階層の解 $L(t) \in \mathcal{E}_{R_t}$ を与える.

**注意 5.2.** 結局，KP 階層の解は $SGM^{\varnothing}$ 上のフローとして捉えられるから，$SGM$ 全体は不要ではないかと思われるかもしれない．実は今の議論を拡張して，$\mathcal{E}_{K_t}$ の範囲で KP 階層の解を考えると，$SGM$ 全体が必要になるのである．正則擬微分作用素の係数を $K$ に拡張することで**擬正則擬微分作用素**が定義される．ただし単に $K$ 係数に拡張すれば良いというわけではなく，極の位数などに関する条件が追加される．$\gamma$ の定義域を $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ から擬正則擬微分作用素全体 $\mathcal{W}$ まで拡張すると，$\mathcal{W}$ と $SGM$ の間に全単射が得られる．従って $\mathcal{W}$ 上の曲線は $SGM$ 上の曲線に対応させることができる．しかしここで問題が発生する．注意 3.10 で述べたように．$K$ 係数の場合は $L$ に対応する $W$ が存在するとは限らない．さらに $\mathcal{W}$ には位数に関する条件も課されている．そのため $K$ 係数の範囲で KP 階層の解 $L(t)$ を $SGM$ 上の曲線に対応させるには，$L(t)$ の位数に関する条件を課す必要がある．このような問題が発生し少々込み入った議論が必要になるため，時間の都合も考えて本発表では $R$ 係数の場合に限って議論を行うことにした．$K$ 係数の場合については例えば [SN84] を参照.

[*1] この方程式の導出には $SGM$ や $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の接空間について議論する必要がある.

# 6

# $\tau$ 関数と広田の双線形形式

## 6.1 $\tau$ 関数

プリュッカー埋め込み $SGM \to \mathbb{P}(\mathcal{F})$ を思い出そう．$U \in SGM$ の基底 $\xi = (\xi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}$ に対して

$$\xi_{-1} \wedge \xi_{-2} \wedge \cdots = \sum_{\sigma\in\mathcal{M}} \Delta_\sigma(\xi) e_{\sigma(-1)} \wedge e_{\sigma(-2)} \wedge \cdots$$

と表せば，この係数たち $(\Delta_\sigma(\xi))_{\sigma\in\mathcal{M}}$ がプリュッカー座標であった．プリュッカー座標はマヤ図形 $\mathcal{M}$ によって添え字付けられていた．$U$ が時間変化する場合，そのプリュッカー座標たちも時間変化する．そこで，$U(t) \in SGM$ のプリュッカー座標の $Y = \varnothing\,(M = \mathbb{N}^c)$ 成分を $\tau$ 関数として定義する．

**定義** **6.1.** $U(0) \in SGM$ を初期値とする $SGM$ 上の曲線 $U(t) = e^{\sum_{m=1}^\infty t_m \partial^m} U(0)$ は KP 階層の解を与えるのであった．$U(0)$ のフレームを $\xi = (\xi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^c}$，$U(t)$ の基底 $\xi(t) = (\xi_\mu(t))_{\mu\in\mathbb{N}^c}$ と表す．この時 $\tau$ 関数は

$$\tau(t) := \tau(t;\xi) := \Delta_\varnothing(\xi(t))$$

で定義される．

**注意 6.2.** プリュッカー座標は斉次座標であるから，定数倍の不定性がある．そこで，$\tau$ 関数の定数倍もまた $\tau$ 関数と呼ぶことにする．

$\tau$ 関数を具体的に計算してみたい．そこで $SGM$ の元を $|U\rangle$ と表し，$|U\rangle$ の $Y \in \mathcal{Y}$ 成分を取り出す写像を $\langle Y|$ と表すことにする．すなわち $\langle Y|U\rangle = \Delta_Y(\xi)$ である．すると

$\sum_{Y\in\mathcal{Y}} |Y\rangle\langle Y| = 1$ であるから[*1]，一般に $U(t) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\partial^m}U(0)$ の $Y$ 成分は

$$\Delta_Y(\xi(t)) = \langle Y|U(t)\rangle = \langle Y|\, e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\partial^m}\,|U(0)\rangle = \sum_{Y'\in\mathcal{Y}} \langle Y|\, e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\partial^m}\,|Y'\rangle\langle Y'|U(0)\rangle$$

と表すことができる．特に $Y = \varnothing$ の場合が $\tau$ 関数であり，

$$\tau(t) = \sum_{Y'\in\mathcal{Y}} \langle\varnothing|\, e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\partial^m}\,|Y'\rangle\langle Y'|U(0)\rangle = \sum_{Y'\in\mathcal{Y}} S_{Y'}(t)\Delta_{Y'}(\xi)$$

となる．ここで $S_{Y'}(t) = \langle\varnothing|\, e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\partial^m}\,|Y'\rangle$ とおいている．実はここで定義した $S_Y(t)$ はヤング図形 $Y$ に対応するシューア多項式になっている．

**定義 6.3.** ヤング図形 $Y = (Y_m, Y_{m-1}, \ldots, Y_0)$ を考える．$l_j := Y_j + j\ (0 \le j \le m-1)$ とおけば，シューア多項式 $S_Y(t)$ は

$$S_Y(t) := S_{l_0,\ldots,l_{m-1}}(t) := \det(p_{l_j-i}(t))_{i,j=0}^{m-1}$$

と定義される．ここで $p_k(t)$ は

$$e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m\lambda^m} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\lambda^k$$

によって定義される多項式である．ただし $k < 0$ に対しては $p_k(t) = 0$ と定義する．

**例 6.4.** $p_k(t)$ は具体的に書けば，

$$p_k(t) = \sum_{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots=k} \frac{t_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{t_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\frac{t_3^{\nu_3}}{\nu_3!}\cdots$$

となる．例えば

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t_1, \quad p_2(t) = \frac{t_1^2}{2} + t_2, \quad p_3(t) = \frac{t_1^3}{6} + t_1t_2 + t_3, \ldots$$

である．

**例 6.5.** シューア多項式は

$$S_{\varnothing}(t) = 1, \quad S_{\square}(t) = t_1, \quad S_{\square\square}(t) = \frac{t_1^2}{2} + t_2, \quad S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}(t) = \frac{t_1^2}{2} - t_2,$$

$$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(t) = t_1^3 - t_3, \quad S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}(t) = \frac{t_1^4}{12} - t_1t_3 + t_2^2$$

などとなる．例えば $S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}(t)$ の計算過程を示すと

$$\begin{aligned} S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}(t) &= \det\begin{pmatrix} p_2(t) & p_3(t) \\ p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} = p_2(t)^2 - p_1(t)p_3(t) \\ &= \left(\frac{t_1^2}{2} + t_2\right)^2 - t_1\left(\frac{t_1^3}{6} + t_1t_2 + t_3\right) = \frac{t_1^4}{12} - t_1t_3 + t_2^2 \end{aligned}$$

となる．

[*1] $|Y\rangle$ は $Y$ 成分だけが 1 で，残りの全ての成分が 0 であるようなプリュッカー座標を持つ点を表している．

**注意 6.6.** 一般線形群の既約表現はヤング図形によって分類される．そして，シューア多項式 $S_Y$ はヤング図形 $Y$ に対応する既約表現の指標を表す多項式である [Ike22]．このような文脈における通常のシューア多項式は

$$t_m = \frac{1}{m}(x_1^m + x_2^m + \cdots)$$

の変換によって，上の $S_Y(t)$ を $x = (x_1, x_2, \ldots)$ に変数変換したものである．

以上の議論により，次の命題が得られる．

**命題 6.7.** 初期値 $\xi = (\xi_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}^c}$ に対する $\tau$ 関数は

$$\tau(t;\xi) = \sum_{Y \in \mathcal{Y}} S_Y(t)\Delta_Y(\xi)$$

と表される．

**注意 6.8.** $\varnothing$ 成分とは限らない一般のプリュッカー座標 $\Delta_Y(\xi(t))$ についても同様に

$$\Delta_Y(\xi(t)) = \sum_{Y' \in \mathcal{Y}} S_{Y'/Y}(t)\Delta_{Y'}(\xi)$$

と表される．ここで $S_{Y'/Y}(t)$ は歪シューア多項式である．歪シューア多項式は，ヤング図形を歪ヤング図形に一般化したものである．ここでは詳細な定義は与えない．

## 6.2 広田の双線形形式

命題 6.7 により，$\tau$ 関数は初期値 $\xi$ のプリュッカー座標 $\Delta_Y(\xi)$ を用いて表されることが分かった．言い換えれば，$\tau$ 関数は初期の情報 $(\Delta_Y(\xi))_{Y \in \mathcal{Y}}$ を全て含んでいる．そして注意 6.8 で述べたように，他のプリュッカー座標 $\Delta_Y(\xi(t))$ も初期値のプリュッカー座標を用いて表される．したがって，$\tau$ 関数を用いて他のプリュッカー座標を表すことができることが期待される．実際，次の命題が成り立つ．

**命題 6.9.** $\tau(t)$ を KP 階層の解に対応する $\tau$ 関数とする．このとき，任意のヤング図形 $Y$ に対して

$$\Delta_Y(\xi(t)) = S_Y(\tilde{\partial}_t)\tau(t)$$

が成り立つ．ここで $\tilde{\partial}_t = (\partial_{t_1}, \frac{1}{2}\partial_{t_2}, \frac{1}{3}\partial_{t_3}, \ldots)$ である．

$(\Delta_Y(\xi(t)))_{Y \in \mathcal{Y}}$ はプリュッカー座標であるから，これらは任意の時刻 $t$ においてプリュッカー関係式

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{i-1} \Delta_{k_0,\ldots,k_{m-2},l_i}(\xi(t))\Delta_{l_0,\ldots,\widehat{l_i},\ldots,l_m}(\xi(t)) = 0$$

を満たさなければならない．命題 6.9 を用いることで，プリュッカー関係式を $\tau$ 関数の微分方程式として

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i-1}\{S_{k_0,\ldots,k_{m-2},l_i}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\}\{S_{l_0,\ldots,\widehat{l_i},\ldots,l_m}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\}=0$$

と書き下すことができる．これを広田微分を用いて表わしたものが広田の双線形形式である．

**定義 6.10.** 広田微分 $D_x$ は，2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$D_x f(x)\cdot g(x) := \frac{\partial}{\partial s} f(x+s)g(x-s)\bigg|_{s=0} = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

で定義される．一般に多項式 $P(X)$ に対して

$$P(D_x)f(x)\cdot g(x) := P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) f(x+s)g(x-s)\bigg|_{s=0}$$

と定める．

ここで注意しなければならないことが 2 つある．1 つ目は，広田微分は 2 つの関数の組 $f(x), g(x)$ に対して定義されていることである．$f(x)\cdot g(x)$ と書いているのは積を表しているわけではなく，あくまで $f(x), g(x)$ の組を表しているだけである．2 つ目は，高階の広田微分 $D_x^n$ は，通常の微分とは異なり $D_x$ を $n$ 回適用したものではないことである．関数の組 $f(x), g(x)$ に対して $D_x$ を 1 回適用した $D_x f(x)\cdot g(x)$ は単なる関数であり，したがって $D_x$ を 2 回適用することはできない．そのため，高階の広田微分 $D_x^n$ は，あくまで多項式として定義される．例えば，$D_x^2$ は

$$D_x^2 f(x)\cdot g(x) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x+s)g(x-s)\bigg|_{s=0} = f''(x)g(x) - 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

である．多変数の場合も同様に定義される．例えば

$$D_x D_y f(x,y)\cdot g(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t} f(x+s,y+t)g(x-s,y-t)\bigg|_{s=t=0}$$

である．

**定理 6.11.** $\tau(t)$ を KP 階層の解に対応する $\tau$ 関数とする．このとき，任意の添え字 $k_0,\ldots,k_{m-2},l_0,\ldots,l_m$ に対して

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i-1} S_{k_0,\ldots,k_{m-2},l_i}\left(\frac{\tilde{D}_t}{2}\right) S_{l_0,\ldots,\widehat{l_i},\ldots,l_m}\left(-\frac{\tilde{D}_t}{2}\right)\tau(t)\cdot\tau(t)=0$$

が成り立つ．ここで $\tilde{D}_t$ は，広田微分の定義において $\partial_t$ を $\tilde{\partial}_t$ に置き換えたものである．

**例 6.12.** 例えば $\mathrm{Gr}(2,4)$ のプリュッカー関係式 (例 4.8)

$$\Delta_{\varnothing}\Delta_{\ydiagram{2,2}} - \Delta_{\ydiagram{1}}\Delta_{\ydiagram{2,1}} + \Delta_{\ydiagram{2}}\Delta_{\ydiagram{1,1}} = 0$$

に命題 6.9 を適用すると

$$\tau(t)\cdot S_{\ydiagram{2,2}}(\tilde{\partial}_t)\tau(t) - S_{\ydiagram{1}}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\cdot S_{\ydiagram{2,1}}(\tilde{\partial}_t)\tau(t) + S_{\ydiagram{2}}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\cdot S_{\ydiagram{1,1}}(\tilde{\partial}_t)\tau(t) = 0$$

となる．シューア多項式の具体的な形 (例 6.5) を代入すると

$$\begin{aligned}\tau(t)\cdot\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4}{\partial t_1^4} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_3} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)\tau(t) - \frac{\partial}{\partial t_1}\tau(t)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t_1^3} - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}\right)\tau(t)\\ + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\tau(t)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\tau(t) = 0\end{aligned}$$

であり，これを広田微分を用いて書き直すことで

$$\left(D_{t_1}^4 + 3D_{t_2}^2 - 4D_{t_1}D_{t_3}\right)\tau(t)\cdot\tau(t) = 0$$

を得る．これは KP 方程式の双線形形式である (§1.2 参照).

さらに，$\tau$ 関数を用いると，対応する $W(t) = 1 + w_1(t,x)\partial^{-1} + w_2(t,x)\partial^{-2} + \cdots$ の係数は

$$w_i = \frac{1}{\tau}p_i(-\tilde{\partial}_t)\tau$$

で与えられることがわかる．特に $i = 1$ の場合は

$$w_1 = -\frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial t_1}\log\tau = -\frac{\partial}{\partial x}\log\tau$$

である．これと注意 3.11 で述べた $u_2 = -\frac{\partial w_1}{\partial x}$ を合わせると

$$u_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau$$

を得る．これは KP 方程式を双線形形式で表すための変換式であった.

# A

# KdV 階層と $SGM$

この付録 A の内容は私が勝手に考えてみたものなので，全く的外れの可能性もあります．もし正しいのであればよく知られている事実だと思いますが，私は門外漢であり知りません．何かご存知の方はコメントいただけるとありがたいです．

## A.1 KdV 階層の条件の書き換え

$SGM$ のうち，KdV 階層の解に対応している部分集合を探したい．簡単のために $R = \mathbb{C}[[x]]$ 係数擬微分作用素の範囲で解を考えることにし，したがって $SGM^{\varnothing}$ 内の部分集合を探すことにする．KP 階層の解 $L(t) \in \mathcal{E}_{R_t}$ が KdV 階層の解であるための必要十分条件は $L(t)^2 \in \mathcal{D}_{R_t}$ を満たすことであった．この条件が $SGM^{\varnothing}$ 上でどのような条件になるかを考える．

$L \in \mathcal{E}_R$ が $L^2 \in \mathcal{D}_R$ を満たすとする．このとき，$L$ に対応する $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は $L^2 = W\partial^2 W^{-1} \in \mathcal{D}_R$ を満たす．$W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は $SGM^{\varnothing}$ の元 $U = W^{-1}V^{\varnothing}$ に対応するのであった (定理 5.1)．一般に擬微分微分作用素 $P \in \mathcal{E}_R$ に対して，$P \in \mathcal{D}_R$ であることは $PV^{\varnothing} \subset V^{\varnothing}$ を満たすことと同値である[*1]．したがって $W^{-1} = \partial^{-2}W^{-1}L^2$ に注意すれば，$U \in SGM^{\varnothing}$ は

$$U = W^{-1}V^{\varnothing} = \partial^{-2}W^{-1}L^2V^{\varnothing} \subset \partial^{-2}W^{-1}V^{\varnothing} = \partial^{-2}U$$
$$\therefore \partial^2 U \subset U$$

を満たす．逆に $U \in SGM^{\varnothing}$ が $\partial^2 U \subset U$ を満たすとする．このとき，$U$ に対応する

[*1] この事実は，$V^{\varnothing}$ の定義と，$\partial$ や $x$ の $\mathcal{V}$ への作用の仕方がどうなっているかを考えればすぐにわかる．

$W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は

$$\partial^2 W^{-1} V^{\varnothing} = \partial^2 U \subset U = W^{-1} V^{\varnothing}$$
$$\therefore W \partial^2 W^{-1} V^{\varnothing} \subset V^{\varnothing}$$

を満たす．先に述べたことから，これは $W\partial^2 W^{-1} \in \mathcal{D}_R$ を意味する．したがって $L^2 \in \mathcal{D}_R$ である．

## A.2　結論

以上の議論により，$SGM^{\varnothing}$ の部分集合

$$SGM^{\varnothing}_{(2)} := \{U \in SGM^{\varnothing} \mid \partial^2 U \subset U\}$$

を考えると，これは KdV 階層の解に対応する佐藤グラスマン多様体の部分集合になっている．同様の議論により，$n \in \mathbb{N}$ に対して $SGM$ の部分集合

$$SGM^{\varnothing}_{(n)} := \{U \in SGM^{\varnothing} \mid \partial^n U \subset U\}$$

を定めると，$SGM^{\varnothing}_{(n)}$ の元に対応する擬微分作用素 $L$ は $L^n \in \mathcal{D}_R$ を満たすことがわかる．

# B

# 佐藤グラスマン多様体の接束

元々はこの内容は §5.2 のあとに付けていたのだが，時間の都合で発表には含めなかったのでこちらに移した．書いてからごちゃごちゃといじってしまったので少々見づらいかもしれないし，誤って切り取ってしまって不十分になっているところもあるかもしれない．消すのはもったいないなと思って残しておいているだけなので，この付録はあまり気にしない方が良い．ちゃんとしたことは [SN84] に書いてある．

## B.1 ♠$SGM$ と $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の接束

§5.2 で求めた $U(t)$ の微分方程式は，本当は接空間における等式として解釈すべきである．そこでまずは $SGM$ の各点 $U$ に対して接空間 $T_U SGM$ を定義する．微小変形を表すために二重数

$$\mathbb{C}_\varepsilon = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$$

を用いる．$R_\varepsilon = \mathbb{C}_\varepsilon[[x]]$ として，$R_\varepsilon$ 係数の擬微分作用素のなす環 $\mathcal{E}_{R_\varepsilon}$ を考え，$\mathcal{V}$ も $\mathcal{V}_\varepsilon = \mathcal{E}_{R_\varepsilon}/\mathcal{E}_{R_\varepsilon} x = \mathcal{V} \oplus \varepsilon\mathcal{V}$ としておく．

**定義** **B.1.** $U \in SGM$ に対して $U_\varepsilon := U \oplus \varepsilon U \subset \mathcal{V}_\varepsilon$ と定める．$\mathbb{C}_\varepsilon$-部分空間 $\tilde{U} \subset \mathcal{V}_\varepsilon$ が $U_\varepsilon$ の**微小変形**であるとは，$\mathbb{C}_\varepsilon$ ベクトル空間としての同型写像 $U_\varepsilon \to \tilde{U}$ が存在して，次の図式が可換になることである．

$$\begin{array}{ccc} U_\varepsilon & \xrightarrow{\ \sim\ } & \tilde{U} \\ & {\scriptstyle \varepsilon\to 0}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varepsilon\to 0} & \\ & U & \end{array}$$

ここで $\varepsilon \to 0$ は自然な射影 $\mathcal{V}_\varepsilon \to \mathcal{V}$ を表す．また $U \in SGM$ の微小変形全体の集合を $T_USGM$ と書き，$SGM$ の**接束**を $TSGM = \bigsqcup_{U\in SGM} T_USGM$ と定義する．

**注意 B.2.** 定義から $U_\varepsilon$ 自体は $U$ の自明な微小変形である．$U_\varepsilon$ は $T_USGM$ の原点に対応する．

微小変形は次のように表すこともでき，このように表すとより微小変形っぽさが見える．

**命題 B.3.** $U \in SGM, \tilde{U} \in T_USGM$ とする．このとき，ある擬微分作用素 $P \in \mathcal{E}_R$ が存在して

$$\tilde{U} = (1+\varepsilon P)U_\varepsilon = e^{\varepsilon P}U_\varepsilon$$

と表すことができる．この $P$ には $W\mathcal{D}_RW^{-1}$ の分の不定性がある．ここで $U = \gamma(W)$ としている．

$SGM$ の場合と同様に，$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の微小変形の集合として接束 $T\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ も定義できる．

**定義 B.4.** $W_\varepsilon = 1 + w_1\partial^{-1} + \cdots \in \mathcal{E}_{R_\varepsilon}$ の形の擬微分作用素全体の集合を $T\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ と表す．$W := W_\varepsilon|_{\varepsilon\to 0}$ とすると $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ である．この対応により $W_\varepsilon$ を $W$ の**微小変形**と呼ぶ．また，$W$ の微小変形全体の集合を $T_W\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ と書くと $T\mathcal{W}_{\mathrm{reg}} = \bigsqcup_{W\in\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}} T_W\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ となる．これにより，$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の**接束** $T\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ が定まる．

**注意 B.5.** $W_\varepsilon \in T_W\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ を $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ の微小変形とすると，ある $X \in \mathcal{E}_R$($X$ は $\partial$ の冪として $-1$ 次以下の項からなる) が一意的に存在して

$$W_\varepsilon = (1+\varepsilon X)W = e^{\varepsilon X}W$$

と表すことができる．このように表示すると，より微小変形っぽさが見える．

全単射 $\gamma\colon \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to SGM^\varnothing$ の微分を考えることで，$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ と $SGM^\varnothing$ の接束の間に対応が得られる．

**定理 B.6.** $\gamma\colon \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to SGM^\varnothing$ の微分は

$$T\gamma\colon T\mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to TSGM^\varnothing, \quad W_\varepsilon \mapsto W_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon^\varnothing$$

で与えられ，これは全単射である．実際，逆写像は，$\tilde{U} \in T_USGM^\varnothing$ に対して $U = \gamma(W)$ となる $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ を取れば

$$(T\gamma)^{-1}(\tilde{U}) = e^{\varepsilon B_P^{\mathrm{c}}}W$$

と表せる．ここで $P \in \mathcal{E}_R$ は命題 B.3 のものであり，$B_P^{\mathrm{c}} = -(WPW^{-1})_- \in \mathcal{E}_R$ は $\partial$ の冪として $-1$ 次以下の項からなる擬微分作用素である．

## B.2 ♠擬正則擬微分作用素と $SGM$

**定義 B.7.** $W \in \mathcal{E}_K$ を $W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$ の形の擬微分作用素とする．このとき $W$ が**擬正則**であるとは，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x^m W \in \mathcal{E}_R, \quad W^{-1}x^n \in \mathcal{E}_R$$

となることをいう．また，このような $W$ 全体の集合を $\mathcal{W}$ と書くことにする．

大雑把に言えば，擬正則擬微分作用素とは，係数関数 $w_i(x)$ に極を許すが，極の階数が有界であるような擬微分作用素である．

**注意 B.8.** $W \in \mathcal{W}$ であって $m, n$ として 0 が取れるものが正則擬微分作用素である．$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は擬微分作用素の積に関して群をなすが $\mathcal{W}$ は群にならない．

擬正則擬微分作用素全体 $\mathcal{W}$ と佐藤グラスマン多様体 $SGM$ の間には自然な対応が存在する．

**定理 B.9.** $W \in \mathcal{W}$ とし，整数 $m, n$ を定義 B.7 のものとする．このとき，部分空間

$$(W^{-1}x^n)V^{\varnothing} = \{\xi \in \mathcal{V} \mid (x^m W)\xi \in V^{\varnothing}\} \subset \mathcal{V}$$

は $m, n$ の取り方に依らずに定まり，さらに $SGM$ に属する．そこで

$$\gamma\colon \mathcal{W} \to SGM, \quad \gamma(W) = (W^{-1}x^n)V^{\varnothing}$$

と定めると，これは全単射である．

**注意 B.10.** この対応 $\gamma$ によって，$\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ は $SGM^{\varnothing}$ に対応するのであった (定理 5.1).

$$\gamma\colon \mathcal{W}_{\mathrm{reg}} \to SGM^{\varnothing}, \quad \gamma(W) = W^{-1}V^{\varnothing}.$$

より一般に，$\mathcal{W}$ もヤング図形を用いて $\mathcal{W} = \bigsqcup_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{W}^Y$ と分割できる．このとき $\gamma$ は $\mathcal{W}^Y$ と $SGM^Y$ の間の全単射を与える．

## B.3 ♠$SGM$ と $\mathcal{W}$ の接束

$SGM$ の場合と同様に，$\mathcal{W}$ の微小変形の集合として接束 $T\mathcal{W}$ も定義できる．

**定義 B.11.** 擬微分作用素 $W_\varepsilon = 1 + w_1\partial^{-1} + \cdots \in \mathcal{E}_{K_\varepsilon}$ であって，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x^m W_\varepsilon \in \mathcal{E}_{R_\varepsilon}, \quad W_\varepsilon^{-1}x^n \in \mathcal{E}_{R_\varepsilon}$$

を満たすようなもの全体の集合を $T\mathcal{W}$ と書く．$W := W_\varepsilon|_{\varepsilon\to 0}$ とすると $W \in \mathcal{W}$ である．そこで $W_\varepsilon$ を $W$ の**微小変形**と呼ぶ．また，$W$ の微小変形全体の集合を $T_W\mathcal{W}$ と書くと $T\mathcal{W} = \bigsqcup_{W\in\mathcal{W}} T_W\mathcal{W}$ となる．これにより，$\mathcal{W}$ の**接束** $T\mathcal{W}$ が定義される．

**注意 B.12.** $W_\varepsilon \in T_W\mathcal{W}$ を $W \in \mathcal{W}$ の微小変形とすると，ある $X \in \mathcal{E}_K$($X$ は $\partial$ の冪として $-1$ 次以下の項からなる) が存在して

$$W_\varepsilon = (1+\varepsilon X)W = e^{\varepsilon X}W$$

と表すことができる．

全単射 $\gamma\colon \mathcal{W} \to SGM$ の微分を考えることで，$\mathcal{W}$ と $SGM$ の接束の間に対応が得られる．

**定理 B.13.** $\gamma\colon \mathcal{W} \to SGM$ の微分は

$$T\gamma\colon T\mathcal{W} \to TSGM, \quad W_\varepsilon \mapsto (W_\varepsilon^{-1}x^n)V_\varepsilon^{\varnothing}$$

で与えられ，これは全単射である．実際，逆写像は，$\tilde{U} \in T_USGM$ に対して $U = \gamma(W)$ となる $W \in \mathcal{W}$ を取れば

$$(T\gamma)^{-1}(\tilde{U}) = e^{\varepsilon B_P^c}W$$

と表せる．ここで $P \in \mathcal{E}_R$ は命題 B.3 のものであり，$B_P^c = -(WPW^{-1})_- \in \mathcal{E}_K$ である．

# C 勉強の参考になる資料

まず佐藤理論に関する入門書としては [SN84] が最も有名である．これは佐藤先生が上智大学で行った集中講義の講義録であり，講義では省略された証明なども野海先生によって補完されている．また現時点では未出版だが，武部先生と野海先生による共著 [NT] が執筆中であり[*1]，この本の前半部分は主に [SN84] の英訳である．[SN84] よりも色々詳しく書いてあるので，今から勉強するのであればこちらの方が読みやすいかもしれない (そんなに遠くない未来に出版されるはず！)．

それから，伊達，神保，柏原，三輪らは佐藤幹夫の考え方をさらに発展させ，変換群や表現論的な視点から研究を進めた [KM81, DKM81, DJKM81b, DJKM82b, DJKM82a, DJKM81a, DJKM82c]．三輪先生, 神保先生, 伊達先生による「ソリトンの数理」[MJD07] は，ソリトン理論をこの視点から扱った書籍である．

最近出版された，高崎先生の「線形代数とグラスマン多様体」[Tak24] でも佐藤理論が扱われている．この本では，佐藤理論を学ぶために必要な線形代数やグラスマン多様体の基礎が丁寧に解説されている．

佐藤理論では無限次元グラスマン多様体などの幾何学的な概念を代数幾何学的に取り扱っている．Segal と Wilson [SW85] は微分幾何学的に無限次元グラスマン多様体を定義し，解析学的に佐藤理論を展開することに成功した[*2]．また，初めに少しだけ触れた逆散乱法については，例えば [SD79] などが良いらしい．

2026/2/28 追記：金沢篤先生から，山田先生の [Yam24] もわかりやすかったと教えていただきました．ありがとうございます．

---

[*1] `https://takebetakashi.seesaa.net/article/485636962.html`

[*2] ちなみに Graeme Segal は Martin Guest 先生の指導教官.

# 参考文献


[DJKM81a] Etsuro Date, Michio Jimbo, Masaki Kashiwara, and Tetsuji Miwa, *Kp hierarchies of orthogonal and symplectic type-transformation groups for soliton equations vi–*, Journal of the Physical Society of Japan **50** (1981), no. 11, 3813–3818.

[DJKM81b] ———, *Operator approach to the kadomtsev-petviashvili equation-transformation groups for soliton equations iii-*, Journal of the Physical Society of Japan **50** (1981), no. 11, 3806–3812.

[DJKM82a] ———, *Quasi-periodic solutions of the orthogonal kp equation—transformation groups for soliton equations v—*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **18** (1982), no. 3, 1111 –1119.

[DJKM82b] ———, *Transformation groups for soliton equations: Iv. a new hierarchy of soliton equations of kp-type*, Physica D: Nonlinear Phenomena **4** (1982), no. 3, 343–365.

[DJKM82c] ———, *Transformation groups for soliton equations—euclidean lie algebras and reduction of the kp hierarchy—*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **18** (1982), no. 3, 1077 –1110.

[DKM81] Etsuro Date, Masaki Kashiwara, and Tetsuji Miwa, *Vertex operators and tau-functions transformation groups for soliton-equations ii*, Proceedings of the Japan Academy Series A-Mathematical Sciences **57** (1981), no. 8, 387–392.

[GGKM67] Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, and Robert M. Miura, *Method for solving the korteweg-devries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967Nov), 1095–1097.

[Hir71] Ryogo Hirota, *Exact solution of the korteweg—de vries equation for multiple collisions of solitons*, Phys. Rev. Lett. **27** (1971Nov), 1192–1194.

[Hir92] ———, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.

[Ike22] Takeshi Ikeda, テンソル代数と表現論, 東京大学出版会, 2022.

[KdV95] D. J. Korteweg and G. de Vries, *Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **39** (1895), no. 240, 422–443, available at `https://doi.org/10.1080/14786449508620739`.

[KM81] Masaki Kashiwara and Tetsuji Miwa, *The tau-function of the kadomtsev-petviashvili equation - transformation groups for soliton-equations .1.*, Proceedings of the Japan Academy Series A-Mathematical Sciences **57** (1981), no. 7, 342–347.

[KP70] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, *On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media*, Soviet Physics Doklady **15** (December 1970), 539.

[Lax68] Peter D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Communications on Pure and Applied Mathematics **21** (1968), no. 5, 467–490, available at `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160210503`.

[MJD07] Tetsuji Miwa, Michio Jimbo, and Etsuro Date, ソリトンの数理, 岩波書店, 東京, 2007.

[NT] Masatoshi Noumi and Takashi Takebe, *Algebraic analysis of integrable hierarchies*, to appear.

[Oik] Masayuki Oikawa, 非線形波動：ソリトンを中心として, ながれ.

[Rus44] J. S. Russell, *Report on waves*, Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science (1844), 311–390, available at `http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/Scott-Russell/SR44.pdf`.

[Sat81] Mikio Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold*, 1981, pp. 30–46. Available at: `http://hdl.handle.net/2433/102800`.

[SD79] Tanaka Syunichi and Etsuro Date, *Kdv* 方程式, Kinokuniya Shoten, 1979.

[SK14] Mikio Sato and Tatsuo Kimura, 佐藤幹夫の数学, 増補版, 日本評論社, 東京, 2014.

[SN84] Mikio Sato and Masatoshi Noumi, ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学数学講究録 ; no.18, 1984. Available at: `https://sophia.repo.nii.ac.jp/records/2026214`.

[SS83] Mikio Sato and Yasuko Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold*, Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982), 1983, pp. 259–271. MR730247

[SW85] Graeme Segal and George Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **61** (1985), 5–65. MR783348

[Tak24] Kanehisa Takasaki, 線形代数とグラスマン多様体, 日本評論社, 東京, 2024.

[Yam24] Hirofumi Yamada, 組合せ論トレイル *: Combinatorics trail*, 日本評論社, 東京, 2024.

[ZK65] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of 'Solitons' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240–243.