断面曲率から曲率テンソルが決まる幾何学的な理由

今田夏暉

2026 年 10 月 17 日

断面曲率はリーマン曲率テンソルの情報を全て含んでいることが知られている．本稿の目的は，Bianchi 恒等式が $\mathrm{Gr}(2,n)$ の Plücker 関係式と同じ形をしているという観点に着目し，この事実に対して幾何学的な証明を与えることである．

1　断面曲率

(M,g) をリーマン多様体とし，∇ を Levi-Civita 接続とする．

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$$

で定まる (1,3) 型テンソル場 R をリーマン曲率テンソルという．また，

$$R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z,W) \qquad \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$$

で定まる (0,4) 型テンソル場も R で表す．リーマン曲率テンソルが多様体の内在的な曲率の情報を全て保持しており，リッチ曲率やスカラー曲率などの各種曲率はリーマン曲率テンソルから得られる．その中でも今回は断面曲率に着目する．

Definition 1.1. $x \in M$ における接空間 T_xM の 2 次元部分空間 $\sigma \subset T_xM$ に対して

$$K(\sigma) := R(v,w,w,v)$$

とする．ここで $v,w \in T_xM$ は σ の正規直交基底である．$K(\sigma)$ を σ における断面曲率という．

リーマン曲率テンソルは，いくつかの対称性を持つ．

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$
2. $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$
3. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

まず 1 つ目は，定義からすぐにわかる通り，左側の 2 つの成分は反対称であることを意味している．また，少し計算すると，右側の 2 成分についても反対称であることがわかり，それが 2 つ目の対称性である．さらに，左右の 2 成分をまとめて扱えば対称であり，それが 3 つ目の対称性である．すなわちリーマン曲率テンソルは，

$$R(X\wedge Y, Z\wedge W) := R(X,Y,Z,W)$$

によって $R \in \Gamma(S^2(\bigwedge^2 T^*M))$ とみなせる．ここで $\bigwedge^2$ は交代テンソル，S^2 は対称テンソルを表す．

2　何が問題か

E を有限次元ベクトル空間とし，$A \in S^2(E^*)$ を対称双線形形式とする．すなわち $A\colon E \times E \to \mathbb{R}$ は双線形形式であり，任意の $v, w \in E$ に対して $A(v,w) = A(w,v)$ を満たす．極化恒等式

$$A(v,w) = \frac{1}{2}\left(A(v+w, v+w) - A(v,v) - A(w,w)\right)$$

が成り立つことから，A はそれが定める斉次 2 次多項式

$$q_A\colon E \to \mathbb{R}, \qquad q_A(v) = A(v,v)$$

によって一意に決定される．そして逆に，斉次 2 次多項式から対称双線形形式が得られる．すなわち，対称双線形形式を調べることと，斉次 2 次多項式を調べることは等価である．

Lemma 2.1. *$q\colon E \to \mathbb{R}$ を斉次 2 次多項式とする．このとき，*

$$A_q(v,w) := \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

で定まる $A_q\colon E \times E \to \mathbb{R}$ は対称双線形形式である．

Proof. E の基底を固定し，その座標 (双対基底) を $x^1, \dots, x^n$ とする．q は斉次二次多項式であるから $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j$ $(a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R})$ と表せる．このとき，任意の $v, w \in E$ に対して

$$A_q(v,w) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}((v^i + w^i)(v^j + w^j) - v^i v^j - w^i w^j) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(v^i w^j + v^j w^i) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v^i w^j$$

となる．ただし $v^i = x^i(v), w^i = x^i(w)$ である．したがって A_q は対称双線形形式である． □

$E = \bigwedge^2 T_x M$ とすると，$R_x \in S^2(E^*)$ であるから，R_x はその斉次 2 次多項式 q_{R_x} から定まる．そして，断面曲率は $K(\sigma) = -q_{R_x}(v \wedge w)$ で与えられる $(v, w \in T_x M$ は σ の正規直交基底$)$．したがって一見すると，全ての点 $x \in M$ と全ての 2 次元部分空間 $\sigma \subset T_x M$ に対する断面曲率 $K(\sigma)$ が与えられれば斉次 2 次多項式 q_{R_x} が決定され，結果としてリーマン曲率テンソル R_x が復元されるように思える．しかしこれは正しくない．なぜならば，E には $v_1 \wedge w_1 + v_2 \wedge w_2$ のような和の形の元も含まれており，そのような元に対する q_{R_x} の値は断面曲率からは指定されないからである．

ではなぜ断面曲率からリーマン曲率テンソルが復元されるのかというと，リーマン曲率テンソルは Bianchi 恒等式

$$R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0 \qquad \forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

を満たすからである．

3　Plücker 関係式

V を n 次元ベクトル空間とする．V の m 次元部分空間全体の集合を $\mathrm{Gr}(m, V)$ で表し，グラスマン多様体という．$W \in \mathrm{Gr}(m, V)$ とし，W の基底 $\{w_1, \dots, w_m\}$ を取ると，$w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \in \bigwedge^m V$ が定まる．$w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$ が基底の取り方によって定数倍だけ変化することを踏まえれば，射影空間への写像

$$\mathrm{Gr}(m, V) \to \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^m V), \qquad W \mapsto [w_1 \wedge \cdots \wedge w_m]$$

が well-defined に定まることがわかる．これを Plücker 埋め込みという．V の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を取ると，$\bigwedge^m V$ の基底は $\{e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n\}$ で与えられる．ここで $I = (i_1, \dots, i_m)$ は多重添え字である．

したがって $\alpha \in \bigwedge^m V$ に対して

$$\alpha = \sum_I \xi_I(\alpha) e_I$$

とすることで，$\bigwedge^m V$ の座標関数 $\{\xi_I\}_I$ が定まる．$\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ の斉次座標は $[\xi_{I_1} \colon \cdots \colon \xi_{I_N}]$ $(N = \binom{n}{m})$ で与えられる．Plücker 埋め込みは一般には全射ではなく，その像は Plücker 関係式と呼ばれる，座標関数の 2 次多項式によって特徴付けられる．

Theorem 3.1. $\alpha \in \bigwedge^m V$ $(\alpha \neq 0)$ とする．$[\alpha]$ が *Plücker* 埋め込みの像に含まれるための必要十分条件は，任意の $i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-1}, j_1 < j_2 < \cdots < j_{m+1}$ に対して

$$\sum_{l=1}^{m+1} (-1)^{l-1} \xi_{i_1,\ldots,i_{m-1},j_l}(\alpha) \xi_{j_1,\ldots,\hat{j_l},\ldots,j_{m+1}}(\alpha) = 0$$

が成り立つことである．$\hat{j_l}$ は j_l を除くことを意味する．この式を *Plücker* 関係式という．

Proof. 証明は例えば高崎金久先生の「線形代数とグラスマン多様体」などを参照. □

Remark 3.2. Plücker 関係式における $\xi_{i_1,\ldots,i_{m-1},j_l}$ などを考えると $i_1, \ldots, i_{m-1}, j_l$ は必ずしも増大列になっているとは限らない．増大列とは限らない多重添え字に対しては，添え字に関して交代的になるように拡張することにする．例えば $\xi_{1,2}(\alpha) = -\xi_{2,1}(\alpha)$ である．元々，$\xi_{i_1,\ldots,i_m}(\alpha)$ は $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ の係数であったからこのような拡張が妥当であることは納得できるだろう．

Example 3.3. 最も簡単な例は $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{R}^4) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{R}^4)$ である．この場合の Plücker 関係式は

$$\xi_{12}\xi_{34} - \xi_{13}\xi_{24} + \xi_{14}\xi_{23} = 0$$

の 1 つだけである．他の添え字の組み合わせ i_1, j_1, j_2, j_3 で考えても，これと同じ式か自明な式にしかならない．

定義からわかるように，Plücker 埋め込みの像は

$$\{[w_1 \wedge \cdots \wedge w_m] \in \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^m V) \mid w_1, \ldots, w_m \in V \text{ は一次独立 }\}$$

という部分集合に一致する．したがって Plücker 関係式は，$\alpha \in \bigwedge^m V$ が $\alpha = w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$ のような “単項式” の形で表されるための必要十分条件を与えているとも解釈できる．そこで，そのような元からなる $\bigwedge^m V$ の部分集合を

$$D = \{w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \mid w_1, \ldots, w_m \in V\} \subset \textstyle\bigwedge^m V$$

と表すことにする．D は Plücker 埋め込みの像の affine cone である．

本記事の目的のためには $m = 2$ の場合が重要であるから，$m = 2$ の Plücker 関係式をもう少し調べる．$m = 2$ の場合の Plücker 関係式は 4 つの添え字 $1 \leq i, j, k, l \leq n$ で定まる．そこで，任意の $1 \leq i, j, k, l \leq n$ に対して，$P_{ijkl} \colon \wedge^2 V \to \mathbb{R}$ を Plücker 関係式の左辺

$$P_{ijkl}(\alpha) = \xi_{ij}(\alpha)\xi_{kl}(\alpha) - \xi_{ik}(\alpha)\xi_{jl}(\alpha) + \xi_{il}(\alpha)\xi_{jk}(\alpha)$$

で定める．このとき P_{ijkl} は添え字 i, j, k, l に関して完全反対称な斉次 2 次多項式になっていることがわかる．したがって，Plücker 関係式は，昇順の $i < j < k < l$ に対する $P_{ijkl} = 0$ だけを考えれば十分である．

Corollary 3.4. $\alpha \in \bigwedge^2 V$ とする．$\alpha \in D$ であるための必要十分条件は，任意の $1 \leq i < j < k < l \leq n$ に対して $P_{ijkl}(\alpha) = 0$ を満たすことである．

すなわち D は 2 次式 P_{ijkl} たちの零点集合として特徴付けられるから，D 上で消える斉次 2 次多項式は P_{ijkl} たちの線形結合として表される．

Corollary 3.5. 斉次 *2* 次多項式 $q\colon \bigwedge^2 V \to \mathbb{R}$ は $q|_D = 0$ を満たすとする．このとき

$$q = \sum_{1\le i<j<k<l\le n} c_{ijkl} P_{ijkl} \qquad (c_{ijkl} \in \mathbb{R})$$

と表すことができる．

Proof. 具体的な計算で確認することもできる．$e_i \wedge e_j$ や $e_i \wedge (e_j + e_k)$ の形の元を q に代入して 0 になるという条件から，ξ_{ij}^2 や $\xi_{ij}\xi_{ik}$ の形の項は係数が 0 であることがわかる．さらに，$(e_i + e_k) \wedge (e_j + e_l)$ や $(e_i + e_l) \wedge (e_j + e_k)$ の形の元を q に代入して 0 になるという条件から，残っている係数の関係もわかり，P_{ijkl} でまとめられることがわかる． □

4 証明

前節同様，V の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を固定しておく．また，$A \in S^2(\bigwedge^2 V^*)$ に対して $A_{ijkl} = A(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l)$ とおく．A が Bianchi 恒等式を満たすとは，任意の $1 \le i, j, k, l \le n$ に対して $A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0$ が成り立つことである．$S^2(\bigwedge^2 V^*)$ の元のうち，Bianchi 恒等式を満たすもの全体を $\mathcal{R}(V)$ で表すことにする．リーマン曲率テンソル R は点 $x \in M$ において $R_x \in \mathcal{R}(T_xM)$ である．

Remark 4.1. 多様体 M にどんな計量を与えたとしても，そのリーマン曲率テンソルは必ず $\mathcal{R}(T_xM)$ に属する．その意味で，$\mathcal{R}(T_xM)$ はリーマン曲率テンソル全体の空間を代数的に定義したものと解釈できる．

Bianchi 恒等式の 2 項目を少し書き換えると

$$A_{ijkl} - A_{ikjl} + A_{iljk} = 0$$

となり，$\mathrm{Gr}(2, V)$ の Plücker 関係式と同じ形になっていることがわかる．これから次の命題が従う．

Proposition 4.2. $A \in S^2(\bigwedge^2 V^*)$ が $A \in \mathcal{R}(V)$ であるための必要十分条件は，任意の $1 \le i < j < k < l \le n$ に対して $P_{ijkl}(\partial) q_A = 0$ が成り立つことである．ここで $P_{ijkl}(\partial) = \partial_{ij}\partial_{kl} - \partial_{ik}\partial_{jl} + \partial_{il}\partial_{jk}$ であり，∂_{ij} は座標 ξ_{ij} に関する偏微分である．

Proof. A_{ijkl} の定義から，q_A は

$$q_A = \sum_{1\le a<b\le n} \sum_{1\le c<d\le n} A_{abcd}\xi_{ab}\xi_{cd}$$

と展開できる．したがって，$\partial_{ij}\partial_{kl} q_A = A_{ijkl} + A_{klij} = 2A_{ijkl}$ などにより

$$P_{ijkl}(\partial) q_A = 2(A_{ijkl} - A_{ikjl} + A_{iljk})$$

となる．すなわち $P_{ijkl}(\partial) q_A = 0$ は Bianchi 恒等式と同値である． □

以上の準備をもとに，本記事の主目的である定理を証明する．主張したいことは，$A \in \mathcal{R}(V)$ の元が D 上での値だけで決定されるということである．

Theorem 4.3. $S^2(\bigwedge^2 V^*)$ 上の同値関係を $A \sim A' \Leftrightarrow q_A|_D = q_{A'}|_D$ で定める．このとき

$$\mathcal{R}(V) \to S^2(\textstyle\bigwedge^2 V^*)/\!\sim, \quad A \mapsto [A]$$

は線型同型である．特に，$S^2(\bigwedge^2 V^*)/\!\sim$ の各同値類には *Bianchi* 恒等式を満たす元 $A \in \mathcal{R}(V)$ がただ *1* つ含まれる．

Proof. $P_{ijkl}(\partial) P_{abcd} = 3\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}$ であることを用いる．

(単射性) $A \in \mathcal{R}(V)$ が $q_A|_D = 0$ を満たすとする．このとき，系 3.5 より，$q_A = \sum_{1 \le a<b<c<d \le n} c_{abcd} P_{abcd}$ と表せる．したがって命題 4.2 と合わせて

$$0 = P_{ijkl}(\partial) q_A = 3 c_{ijkl}$$

が得られるため，$q_A = 0$ であり，$A = 0$ が従う．

(全射性) $A \in S^2(\bigwedge^2 V^*)$ を任意に取る．これに対して

$$q_{A'} = q_A - \frac{1}{3} \sum_{1 \le a<b<c<d \le n} (P_{abcd}(\partial) q_A) P_{abcd}$$

となる $A' \in S^2(\bigwedge^2 V^*)$ が定まる (補題 2.1)．明らかに $q_{A'}|_D = q_A|_D$ を満たすから $A' \sim A$ である．また，任意の $1 \le i < j < k < l \le n$ に対して

$$P_{ijkl}(\partial) q_{A'} = P_{ijkl}(\partial) q_A - \frac{1}{3} \cdot 3 (P_{ijkl}(\partial) q_A) = P_{ijkl}(\partial) q_A - P_{ijkl}(\partial) q_A = 0$$

となるので，命題 4.2 より $A' \in \mathcal{R}(V)$ が従う．

□